Chapitre 15 : Calcul matriciel
Partie B : Les matrices carrées, premiers résultats

Dans toute cette partie n dédigne un entier naturel non nul : $n \in \mathbb{N}^*$

I) Des matrices particulières

a) Les matrices carrés

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On dit alors que A est une matrice carrée et par soucis de commodité, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrés d'ordre, c'est-à-dire l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes.

Exemple I.a.1 : Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

b) Stabilité par le produit mais pas commutativité

Remarque : Lorsque les matrices A et B sont carrés et de même dimension, le produit matriciel AB peut toujours se réaliser et la matrice obtenue est de même dimension que A et B :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } B \times A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

ATTENTION : Le produit n'est toujours pas commutatif !!!

Contre-exemple I.b.1 : Déterminer deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A \times B \neq B \times A$$

ATTENTION : Il existe cependant des matrices qui commutent.

Exemple I.b.2 : Déterminer deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent.

c) Matrices diagonales

Définition (Diagonale d'une matrice carré) : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la diagonale de A par l'ensemble des $(a_{i,i})_{i \in [\![1;n]\!]}$.

On dit qu'une matrice est diagonale si et seulement si :

$$a_{i,j} = 0 \text{ dès que } i \neq j$$

Exemple I.c.1 : Déterminer une matrice diagonale de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Propriété I.c.2 : Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices diagonales. On a alors :

$$A \times B = B \times A = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec } c_{i,j} = a_{i,j} \times b_{j,i} \times \delta_{i,j}$$

Avec :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque : $\delta_{i,j}$ s'appelle le symbole de Kronecker

d) La matrice identité

Définition (La matrice identité) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

I_n est une matrice composée que de 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Propriété I.d.1 : La matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), I_p A = A \text{ et } A I_q = A$$

e) Les matrices triangulaires

Définition : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice triangulaire supérieure (resp. supérieure stricte) si et seulement si tous ses éléments en dessous de sa diagonale sont nulles :

$$a_{i,j} = 0 \text{ dès que } i > j \text{ (resp. } i \ge j)$$

Exemple I.e.1 : Déterminer deux matrices de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, l'une triangulaire supérieure, l'autre triangulaire supérieure stricte.

Remarque : On définit de manière analogue les matrices triangulaires inférieures ou inférieures strictes.

Propriété I.e.2 : Le produit de deux matrices triangulaire supérieures (resp. strictes) sont triangulaires supérieures (resp. triangulaires supérieures) et les coefficients de leur diagonales sont les produits des coefficients diagonaux :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & a_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & b_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & & \cdots & \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

II) Puissances d'une matrice carrée

a) Introduction

Définition : Soient $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définir la puissance k-ième de A, noté A^k par :

- $A^0 = I_n$
- $A^1 = 1$
- $\forall k \ge 2, A^k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$

Exemple II.a.1 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout entier naturel n.

Application II.a.2 : On pose : : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En exprimant A^2 à l'aide de A et de I_3, déterminer A^n.

ATTENTION : On peut avoir :

$$A^p = 0\ A \neq 0 \text{ et } A^2 = 0$$

Exemple II.a.3 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2.

De la même façon que l'on peut avoir $AB = 0$ sans avoir $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple II.a.4 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer AB puis BA.

b) Application aux matrices diagonales et triangulaires supérieures

Propriété II.b.1 : Soit A une matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, diagonale). Alors pour tout entier naturel p, A^p une matrice triangulaire supérieure (resp triangulaire inférieure, diagonale). De plus si : $\mathrm{diag}(A) = (\lambda_1; \dots; \lambda_n)$:

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \cdots & \\ 0 & \lambda_2^p & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & (*) & \ddots & 0 \\ & \cdots & & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut montrer et on le fera dans un cadre plus large que les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) strictes s'annule à partir d'un certain rang : $\exists p \geq 2, A^p = 0$. On dit alors que A est <u>nilpotente</u>.

c) Formule du binôme de Newton

Propriété II.c.1 : Soit $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ qui commutent ($AB = BA$). On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Application II.c.2 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour tout p entier.

Application II.c.3 : Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de u_n et v_n.