

DS n°3 : PCSI 2024-2025

Exercice 1 : Une nouvelle valeur de tangente

Dans tout cet exercice on pose :

$$P: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{2i} ((z+i)^5 - (z-i)^5) \end{cases}$$

1) Rappeler la formule du binôme de Newton.

2) a) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{R}, P(z) \in \mathbb{R}$$

b) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(-z) = P(z)$$

3) Montrer que :

$$\exists (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^5 \text{ tel que } P(z) = p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0$$

On donnera les valeurs des p_i pour $i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$.

4) Résoudre $P(z) = 0$.

(On pourra remarquer que : $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$).

5) a) Donner les 5 solutions de : $z^5 = 1$.

b) En déduire que :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}, k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$$

6) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

Exercice 2 : Résolution d'une équation de degré 3

On considère l'équation :

$$(E) : z^3 + (2 + 3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = 0$$

1) Montrer que l'équation (E) possède une solution imaginaire pure, notée z_0 .

2) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (2 + 3i)z^2 + 8iz - 8 + 4i = (z + 2i)(az^2 + bz + c)$$

3) Déterminer les racines carrées de $-5 - 12i$

4) En déduire les solutions de (E).

Exercice 3 : Complexes et ensemble

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{\bar{z} + 1}{z - 1} \end{cases}$$

On pose ici :

$$i\mathbb{R} = \{iy, y \in \mathbb{R}\} = \{\text{imaginaires purs}\}$$

- 1) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.
- 2) Déterminer $f(i\mathbb{R})$.
- 3) Déterminer si f est injective, surjective sur $\mathbb{C}$.
- 4) Montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}) = f^{-1}(\{-1\}) = i\mathbb{R}$$

Exercice 4 : Calcul d'une intégrale

Le but de cet exercice est de calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx$$

- 1) Démontrer que :

$$I = \frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

- 2) En posant le changement de variable $x = \tan(\theta)$, démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta) d\theta$$

- 3) En déduire la valeur de I .

Problème : Calcul d'une somme à l'aide d'une intégrale

Dans cet exercice on cherche à calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{2k}{k} (4k+2)}$$

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

Partie A : Une intégrale à paramètres

1) A l'aide d'un changement de variable, démontrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p, q) = I(q, p)$$

2) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq 1, I(p, q) = \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1)$$

3) En réitérant le procédé, en déduire que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p, q) = \frac{1}{\binom{p+q}{p} (p+q+1)}$$

4) A l'aide du changement de variable $x = \sin^2(t)$, démontrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t) \cos^{2q+1}(t) dt = \frac{1}{2 \binom{p+q}{p} (p+q+1)}$$

Partie B : La limite

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) \cos^{2n+1}(t) dt$$

1) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 - (\sin(t) \cos(t))^2} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1 - (\sin(t) \cos(t))^2} dt$$

Où g_n est une fonction à déterminer.

Dans cette question on rappelle le résultat suivant vu en terminale (Il est vivement conseillé de l'utiliser), appelé linéarité de l'intégrale :

Soit $(f_1, \dots, f_n) \in (\mathcal{C}^0([a, b]))^n$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(t) dt \leq \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(t) dt$$

b) Démontrer que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \cos(t) \leq \frac{1}{2}$$

c) Démontrer que :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1 - (\sin(t) \cos(t))^2} dt \leq \frac{1}{4^{2n+1}} \times \frac{\pi}{6}$$

Dans cette question on rappelle le résultat suivant vu en terminale (Il est vivement conseillé de l'utiliser), appelé croissance de l'intégrale :

Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}^0([a, b]))^2$. On a alors :

$$\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

3) On cherche à calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 - (\sin(t) \cos(t))^2} dt$$

a) A l'aide du changement de variable $u = \cos(2t)$, démontrer que :

$$I = \int_{-1}^1 \frac{du}{3 + u^2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{2k}{k} (4n + 2)}$$