Programme de Colle n°15
(20 au 24 janvier 2025)

Limite de fonctions

a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	

Continuité en un point

b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	

c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Image d'un segment par une fonction continue.	
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.

d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Calcul matriciel

a) Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

Remarque : Nous n'avons pas fait beaucoup d'exercices sur les produits matriciels. On s'attachera à bien comprendre le produit matriciel, y compris pour des matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

Questions de cours

Propriété IV.c.1 (caractérisation séquentielle de la limite) : Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell\right)$$

Propriété III.a.1 (Théorème des valeurs intermédiaires version 1) : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f(a)f(b) < 0. Alors il existe $x_0 \in]a:b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Propriété III.b.3 : On a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists! (S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}) \text{ tels que } M = S + A$$

Exercices types

- Convergence de suites implicites
- Soit $f \in \mathcal{C}([0;1];[0;1])$. Montrer que f admet au moins un point fixe.
- **Exercice A.1** : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer AB et BA puis 3A + B.

- **Exercice A.2** : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer quel produit est autorisé et calculez-le.

- **Exercice A.3** : Résoudre l'équation :

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$