Programme de Colle n°17
(10 au 14 février 2025)

Dérivabilité

- Nombre dérivé comme taux de variation
- Développement limité d'ordre 1 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement s'il existe et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x) \text{ avec } \epsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 0$$

- Toute fonction dérivable est continue
- Opérations sur les fonctions, dérivées d'une réciproque, dérivée n-ième et formule de Leibniz
- Théorème de Rolle, des accroissements finis.
- Fonctions lipchitziennes, contractantes, applications aux suites numériques $u_{n+1} = f(u_n)$
- Fonctions convexes

Polynôme

- Degré d'un polynôme, coefficient dominant
- Fonction polynômiale associée à un polynôme
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, division euclidienne, formule de Taylor, racine d'un polynôme

Questions de cours

Propriété II.c.3 (La formule de Leibniz) : Soient $(f,g) \in \left(\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})\right)^2$. Alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ et on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

TAF (Théorème des accroissements finis) : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a;b]$, f est dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Propriété: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X-a)|P$$

Propriété (formule de Taylor pour les polynômes) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Exercices du type

- Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{3x} \end{cases}$$

- Etudier la convergence de la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1 + e^{-u_n}) \end{cases}$$

- Déterminer tous les polynômes tels que :

$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$$

Exercice B.7 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $M^2 + 2M - 3I_3$.
2) En déduire M^n pour tout entier naturel n.
3) On pose les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite de (u_n) en fonction de n.