DM n°4

Partie A : Théorème de Rolle généralisé

Dans cette partie on se propose de démontrer le théorème de Rolle généralisé, donc voici l'énoncé.
Si f est continue et dérivable sur $[x_0;+\infty[$ telle que :

$$h(x_0) = \lim_{x\to+\infty} h(x)$$

Alors il existe $c \in]x_0;+\infty[$ tel que $h'(c) = 0$.

1) Démontrer que si h est constante alors le théorème est vrai.

2) a) On suppose à présent que h n'est pas constante. Montrer que :

$$\exists x_1 \in]x_0;+\infty[\; tel\ que \ |h(x_1) - h(x_0)| > 0$$

b) Montrer que :

$$\exists x_2 \in]x_1;+\infty[\; tel\ que \ |h(x_2) - h(x_0)| = \frac{1}{2}|h(x_1) - h(x_0)|$$

c) Montrer que :

$$\exists y \in]x_0;x_1[\; tel\ que \ h(y) = h(x_2)$$

En déduire que :

$$\exists c \in [y;x_2] tel\ que\ h'(c) = 0$$

Remarque : On peut démontrer de même que :
Si f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x)$$

Alors il existe $c \in]x_0;+\infty[$ tel que $h'(c) = 0$.

On utilisera ce résultat pour la suite.

Partie B : Une dérivée $n - i$ème

Soit $a > 0$. On pose :

$$g_a : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

1) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \; tel\ que$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}\big(g_a(x)\big) = \frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n}$$

On déterminera P_1 puis une relation entre P_{n+1}, P_n et $P_n{}'$.

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+a^2)g'(x) = a$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = -2nxP_n(x) - n(n-1)(x^2+a^2)P_{n-1}(x)$$

c) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^{n+1}P_n(x)$$

Qu'en déduit-on sur P_n ?

d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Partie C : Etude de P_n

Dans cette question $n \geq 1$.

1) Déterminer :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (g_a)^{(n)}(x)$$

2) En déduire que $(g_a)^{(n)}$ s'annule au moins $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire que $(g_a)^{(n)}$ s'annule exactement $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}$$

5) Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

6) Résoudre $P_n(x) = 0$ et en déduire une expression factorisée de P_n.