Programme de colle n°18
(17 au 21 février 2025)

Polynôme

- Degré d'un polynôme, coefficient dominant
- Fonction polynômiale associée à un polynôme
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, division euclidienne, formule de Taylor
- Racine d'un polynôme, ordre de multiplicité
- Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Analyse asymptotique

- Définition d'un équivalent, « petit o » et « grand O » sur les suites et les fonctions.
- Définition d'un DL en un point a.
- Unicité du DL.
- Formule de Taylor-Young (sans démonstration)
- DL1 et dérivabilité
- Intégration

Remarque : Pour les développements limités, nous n'avons pas encore fait d'exercice. Nous ferons la fin lundi prochain. Pour les colleurs, je conseille de donner un exercice sur les polynômes, puis un exercice sur les DL assez simples, soit trouver un DL grâce à la formule de Taylor, calculer une limite (en aidant l'élève à choisir l'ordre s'il a des difficultés…). Aucune technicité n'est attendue pour cette semaine de colle. Nous n'avons pas encore trouver de DL par somme, produit… Donc retrouver un DL par Taylor est déjà très bien (voir question de cours ci-dessous !).

Questions de cours

Propriété: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X-a)|P$$

Propriété (formule de Taylor pour les polynômes) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Propriété I.c.1 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Retrouver les $DL(0)$ de $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\ln(1-x)$, $\arctan(x)$. DL en 2 de $\frac{1}{x}$…

Exercices du type

- Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{3x} \end{cases}$$

- Déterminer tous les polynômes tels que :

$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$$

Exercice B.5 : 1) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \text{ avec } \ell < 1$$

1) Montrer que $x_n \to 0$
2) Montrer que $n! = o(n^n)$

Exercice A.1 : Donner un équivalent simple des fonctions ci-dessous en 0 :

$$\text{a) } f(x) = \frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} \qquad \text{b) } f(x) = \ln(\cos(x))$$