DM n°5

Exercice 1 : Une suite classique

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:\left\{\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\left\{\begin{array}{c}\dfrac{x}{e^x-1}\ si\ x\neq 0\\ 1\ si\ x=0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

1) Déterminer le $DL_2(0)$ de f.

2) a) En déduire que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donnera la valeur de $f'(0)$.

b) Etudier la position de f avec sa tangente (notée (T_0)), au point d'abscisse $x=0$. On fera un graphique pour représenter cette position !

c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $\mathbb{R}$.

(***Indice*** *: On pourra montrer que* 0 *n'est pas solution de cette équation*).

5) Montrer que :

$$\forall x\geq 0, |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

6) On pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\left\{\begin{array}{c}u_0\in]0;1[\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{e^{u_n}-1}\end{array}\right.$$

a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in]0;1[$$

b) En déduire que :

$$|u_{n+1}-\ln(2)|\leq\frac{1}{2}|u_n-\ln(2)|$$

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Problème (facultatif) : Irrationnalité de $\ln(2)$

Partie A : Une suite qui converge vers $\boldsymbol{ln}(2)$

Dans toute cette partie on pose :

$$\mathrm{I_n}=\int_0^1\frac{\mathrm{t^n}}{1+\mathrm{t}}\mathrm{dt}$$

1) Montrer que I_n est bien définie pour tout entier naturel n.

2) a) Calculer I_0 et I_1.

b) Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall t\in[0;1],\frac{t^2}{1+t}=at+b+\frac{c}{1+t}$$

c) En déduire la valeur de I_2.

3) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{n}\in\mathbb{N},\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}+1}=\ln(2)-(-1)^{\mathrm{n}+1}\mathrm{I_{n+1}}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Partie B : Critère de d'Alembert

On veut montrer le théorème suivant :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \text{ avec } \ell < 1 \Rightarrow u_n \to 0$$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose de plus que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \text{ avec } 0 \leq \ell < 1$$

1) Démontrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 0 < v_n < 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3) Démontrer que la suite (u_n) converge, puis que sa limite est 0.
4) La réciproque du théorème est-elle vraie ?

Partie C : Irrationalité de ln(2)

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n e^{t\ln(2)} dt$$

1) Calculer J_0 et J_1.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n > 0$$

3) Démontrer que :

$$\forall D \in \mathbb{R}, D^n J_n \to 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2} J_{n+1}$$

5) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers A_n tel que :

$$J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2} A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

6) Montrer que si $D = 2p^3$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n J_n \in \mathbb{N}^*$$

7) En déduire l'irrationalité de $\ln(2)$.