Programme de colle n°19
(10 au 14 mars 2025)

Analyse asymptotique

- Définition d'un équivalent, « petit o » et « grand O » sur les suites et les fonctions.
- Définition d'un DL en un point a.
- Unicité du DL.
- Formule de Taylor-Young (sans démonstration)
- DL1 et dérivabilité
- Intégration
- Opérations sur les DL, quotient, produit, combinaison linéaire
- Applications pour le calcul des limites, recherche d'asymptotes, position de la courbe par rapport à la tangente…

Espace vectoriel

- Espaces vectoriels de référence
- Sous-espaces vectoriel
- Famille libre

Remarque : Nous n'avons pas encore fait beaucoup d'exercices sur les espaces vectoriels, et encore moins sur les familles libres. Les colleurs pourront demander aux candidats de montrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel (nous avons fait au moins 10 exemples) et aussi de démontrer qu'une famille est libre (exemples dans le cours mais pas encore en exercices). Nous n'insisterons sur aucune technicité. L'accent sera mis sur les développements limités.

Questions de cours

Propriété I.c.1 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Savoir redémontrer les DL suivants (en moins d'une minute !) :

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x}, x \mapsto e^x, x \mapsto ln(1+x), cos, sin, sh\ et\ ch, arctan, x \mapsto \sqrt{1+x}$$

Propriété III.b.2 (caractérisation des sommes directes) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On a alors :

$$F \oplus G = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Exercices du type

Exercice C.2 : Déterminer le $DL_4(0)$ de :

$$f(x) = e^x \arctan(x), g(x) = \frac{sin^2(x)}{x^2}, h(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

Exercice D.3 : Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right) \quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \quad c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{sin^2(x)}}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x+\sqrt{x^2+1}) - ln(x+\sqrt{x^2-1})}{ln^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \quad e)\ \lim_{x\to+\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} \quad f)\ \lim_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x^x - a^x}$$

Exercice D.4 : On pose :

$$f : x \mapsto \frac{-1+\cos(x)+x\sin(x)}{x^2}$$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2) Démontrer que f peut être prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est derivable en 0.

3) Montrer que f admet un extremum local en 0.

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.