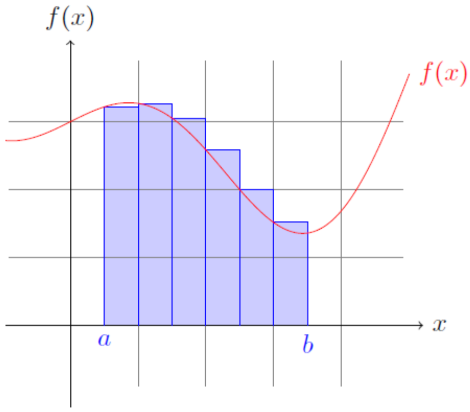
Chapitre 20 : Intégration
Partie B : Somme de Riemann et formule de Taylor

I) Somme de Riemann

a) Lien avec la méthode des rectangles vues en informatique

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. On appelle somme de Riemann « à gauche » d'ordre n associée à f la somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$



Propriété I.a.1 : La somme de Riemann $R_n(f)$ associée à f sur l'intervalle $[a, b]$ est l'intégrale de la fonction en escalier φ qui vaut $f(a_k)$ sur $]a_k; a_{k+1}[$ avec $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $0 \leq k \leq n-1$:

Propriété I.a.2 (Méthode des rectangles à gauche) : Si f est continue sur $[a; b]$ alors :

$$\lim_n R_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque : On utilise souvent la propriété précédente sous cette forme :

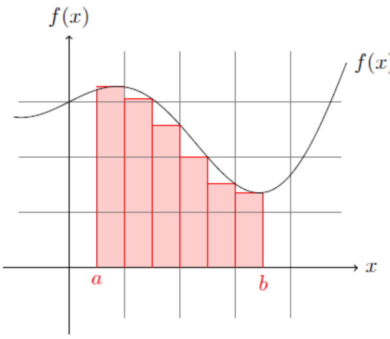
$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Application I.a.3 : Calculer :

$$R = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \; et \; R_2 = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. On appelle somme de Riemann « à droite » d'ordre n associée à f la somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$



Propriété I.a.4 (Méthode des rectangles à droite) : Si f est continue sur $[a; b]$ alors :

$$\lim_n R'_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Application I.a.6 : Calculer :

$$R = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

b) Majoration de l'erreur

Propriété I.b.1 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$. On a alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - R_n(f)\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \times \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Application I.b.2 : Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} de :

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

II) Les formules de Taylor

a) Taylor avec reste intégrale

Propriété II.a.1 : Soient n un entier naturel f: [a; b] → $\mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_{a}^{b} \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Application II.a.2 : Démontrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq sin(x) \leq, x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

b) Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété II.b.1 : Soient n un entier naturel f: [a; b] → $\mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \; avec \; M_{n+1} = \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

Application II.b.2 (Formule de Taylor-Young) : Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n}$, on a :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Application II.b.3 (Application pour les séries entières) : On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$