Programme de colle n°20
17 au 21 mars

Espace vectoriel

- Espaces vectoriels de référence
- Sous-espaces vectoriel
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie non vide X d'un espace vectoriel : vect(X)
- Somme de sous-espaces vectoriel, somme directe.

Intégration

- Subdivision d'un segment
- Intégration des fonctions en escalier
- Valeur moyenne
- Propriétés de l'intégrale

Remarque : On demande aux élèves de réviser les IPP et changements de variables vus au premier semestre ! Cependant on mettra l'accent sur les espaces vectoriels !

Questions de cours

Propriété III.b.2 (caractérisation des sommes directes) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On a alors :

$$F \oplus G = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Exemple III.c.1 : Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\} \oplus \mathrm{vect}\big((1,1,1)\big)$$

Propriété III.c.3 : Soit $(e_1, \dots e_n)$ une base de E. Alors :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], E = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \mathrm{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

Exercices du type

Exercice B.6 : Ecrire les espaces vectoriels suivants sous la forme d'un vect :

$A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+2z = y-2t\}$

$B = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2) = 0\}$

$C = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ géométrique de raison } -3\}$

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Exercice D.8 : a) Calculer :

$$\forall (k,p) \in [\![0,n]\!]^2, \int_0^{\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx = I_{p,k}$$

b) En déduire que $(\cos(kx))_{0 \le k \le n}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice E.2 : On pose :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(0) = P(1) = 0\}$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel.

b) Déterminer une base de E.

Application III.b.2 (Intégrale à paramètre) : On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \int_{-x}^{-3x} e^{-t^2}\, dt$$

Déterminer les variations de Ψ sur $\mathbb{R}$ et sa limite en $+\infty$.

Exercice B.1 : Soit $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = 0$$

Montrer que f s'annule sur $[a; b]$.

Exercice B.2 : Soit $f: [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_{0}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}$$

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

b) Montrer qu'il existe $x_1 \in [0; 1]$ tel que $f(x_1) = 0{,}5$

Exercice B.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue) : Soit $f: [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{0}^{1} t^n f(t)dt = 0$$