Correction DM n°4

DM n°4

Partie A : Théorème de Rolle généralisé

Dans cette partie on se propose de démontrer le théorème de Rolle généralisé, donc voici l'énoncé.
Si h est continue et dérivable sur $[x_0;+\infty[$ telle que :

$$h(x_0) = \lim_{x\to+\infty} h(x)$$

Alors il existe $c \in]x_0;+\infty[$ tel que $h'(c) = 0$.
Dans cette partie on pose $h \in \mathcal{C}^1([x_0;+\infty[)$ tel que :

$$h(x_0) = \lim_{x\to+\infty} h(x)$$

1) Démontrer que si h est constante alors le théorème est vrai.

2) a) On suppose à présent que h n'est pas constante. Montrer que :

$$\exists x_1 \in]x_0;+\infty[\ tel\ que\ |h(x_1) - h(x_0)| > 0$$

b) Montrer que :

$$\exists x_2 \in]x_1;+\infty[\ tel\ que\ \ |h(x_2) - h(x_0)| = \frac{1}{2}|h(x_1) - h(x_0)|$$

c) Montrer que :

$$\exists y \in]x_0;x_1[\ tel\ que\ h(y) = h(x_2)$$

En déduire que :

$$\exists c \in [y;x_2] tel\ que\ h'(c) = 0$$

Remarque : On peut démontrer de même que :
Si f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x)$$

Alors il existe $c \in]x_0;+\infty[$ tel que $h'(c) = 0$.

On utilisera ce résultat pour la suite.

Partie B : Une dérivée $n-i\grave{e}me$

Soit $a > 0$. On pose :

$$g_a : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

1) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \exists P_n \in \mathbb{R}[X]\ tel\ que$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}\big(g_a(x)\big) = \frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n}$$

On déterminera P_1 puis une relation entre P_{n+1}, P_n et $P_n{}'$.

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+a^2)g_a'(x) = a$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = -2nxP_n(x) - n(n-1)(x^2+a^2)P_{n-1}(x)$$

c) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^{n+1}P_n(x)$$

Qu'en déduit-t-on sur P_n ?

d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Partie C : Etude de P_n

Dans cette question $n \geq 1$.

1) Déterminer :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (g_a)^{(n)}(x)$$

2) En déduire que $(g_a)^{(n)}$ s'annule au moins $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.
3) En déduire que $(g_a)^{(n)}$ s'annule exactement $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}$$

5) Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

6) Résoudre $P_n(x) = 0$ et en déduire une expression factorisée de P_n.

Partie A :

1) Si est constante alors :

$$\forall x \in]x_0; +\infty[, h(x) = h(x_0) \Longrightarrow \forall x > x_0, h'(x) = 0$$

On a $h'(x) = 0$ donc la propriété est vraie pour par exemple $c = x_0 + 1$.

2) a) On raisonne par contraposée :

$$\forall x > x_0, |h(x) - h(x_0)| = 0 \Longrightarrow \forall x \geq x_0, h(x) = h(x_0)$$

Donc h est constance.

Donc par contraposée, si h n'est pas constance :

$$\boldsymbol{\exists x_1 \in]x_0; +\infty[\ tel\ que\ |h(x_1) - h(x_0)| > 0}$$

b) On pose :

$$f : x \mapsto |h(x) - h(x_0)| - \frac{1}{2}|h(x_1) - h(x_0)|$$

On a f continue par composée de fonctions continues (la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$). On a :

- f continue sur $]x_0; +\infty[$,
- $f(x_1) > 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists x_2 \in]x_1; +\infty[\ tel\ que\ \ f(x_2) = 0$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \exists x_2 \in]x_1; +\infty[\ tel\ que, |h(x_2) - h(x_0)| = \frac{1}{2}|h(x_1) - h(x_0)|}$$

c) L'énoncé est mal posé. Il faut distinguer deux cas :

1er cas : $h(x_1) > h(x_0)$

On a alors :

h est continue donc prend toutes les valeurs intermédiaires sur $[h(x_0); h(x_1)]$ pour $x \in [x_0; x_1]$. Donc :

$$\exists y \in [x_0; x_1] \text{ tel que } h(y) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{h(x_1) - h(x_0)}\big)$$

De même on a :

$$\exists x_2 \in [x_1; +\infty[\text{ tel que } h(x_2) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{h(x_1) - h(x_0)}\big)$$

Ainsi on a :

$\boldsymbol{\exists y \in]x_0; x_1[\ tel\ que\ h(y) = h(x_2)}$

1er cas : $h(x_1) < h(x_0)$

On a alors :

h est continue donc prend toutes les valeurs intermédiaires sur $[h(x_1); h(x_0)]$ pour $x \in [x_0; x_1]$. Donc :

$$\exists y \in [x_0; x_1] \text{ tel que } h(y) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{h(x_1) - h(x_0)}\big)$$

De même on a :

$$\exists x_2 \in [x_1; +\infty[\text{ tel que } h(x_2) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{h(x_1) - h(x_0)}\big)$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{\exists y \in]x_0; x_1[\ tel\ que\ h(y) = h(x_2)}$$

Dans les deux cas on a :

$$\boldsymbol{\exists y \in]x_0; x_1[\ tel\ que\ h(y) = h(x_2)}$$

c) On applique le théorème de Rolle sur l'intervalle car y est dérivable.

Ainsi :

$$\boldsymbol{\exists c \in [y; x_2] tel\ que\ h'(c) = 0}$$

Partie B :

1) On raisonne par récurrence. On pose :

$$\forall n \geq 1, \mathcal{P}(n) : \text{"} \exists P_n \in \mathbb{R}[X]\ tel\ que\ \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}\big(g_a(x)\big) = \frac{P_n(x)}{(x^2 + a^2)^n} \text{"}$$

Initialisation

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^1}{dx^1}\big(g_a(x)\big) = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{P_1(x)}{x^2 + a^2}$$

Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec $P_1(x) = a$.

Hérédité : Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}\left(g_a(x)\right) = \frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(g_a(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(P_n(x)(x^2+a^2)^{-n}\right) = P_n'(x)(x^2+a^2)^{-n} - 2nxP_n(x)(x^2+a^2)^{-n-1}$$

$$= \frac{(x^2+a^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x)}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

Or on a :

$$P_n \in \mathbb{R}[X] \Longrightarrow P_n{}' \in \mathbb{R}[X] \Longrightarrow \begin{cases}(x^2+a^2)P_n'(x) \\ 2nxP_n(x)\end{cases} \Longrightarrow (x^2+a^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x) \in \mathbb{R}[X]$$

Ainsi en posant :

$$\boldsymbol{P_{n+1}(X) = \left(X^2+a^2\right)P_n'(X) - 2nXP_n(X)}$$

La propriété est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.
2) a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^1}{dx^1}\left(g_a(x)\right) = \frac{a}{x^2+a^2} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x^2+a^2)g'_a(x) = a$$

b) On applique la forme de Leibniz car sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2+a^2)g'_a(x)\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2+a^2)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(g'_a(x)\right)$$

Or on a :

$$\boldsymbol{\frac{d^k}{dx^k}(x^2+a^2) = \begin{cases} x^2+a^2 \text{ pour } k=0 \\ 2x \text{ pour } k=1 \\ 2 \text{ pour } k=2 \\ 0 \text{ pour } k \geq 3 \end{cases}}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2+a^2)g'_a(x)\right] =$$

$$= \binom{n}{0}(x^2+a^2)\frac{d^n}{dx^n}\left(g'_a(x)\right) + \binom{n}{1}2x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(g'_a(x)\right) + \binom{n}{2}2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(g'_a(x)\right)$$

$$= (x^2+a^2)g_a^{(n+1)}(x) + 2nxg_a^{(n)}(x) + n(n-1)g_a^{(n-1)}(x)$$

$$= (x^2+a^2)\frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+a^2)^{n+1}} + 2nx\frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n} + n(n-1)\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{P_{n+1}(x) + 2nxP_n(x) + n(n-1)(x^2+a^2)P_{n-1}(x)}{(x^2+a^2)^n}$$

De plus on a :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}[a] = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) + 2nxP_n(x) + n(n-1)(x^2+a^2)P_{n-1}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = -2nxP_n(x) - n(n-1)(x^2+a^2)P_{n-1}(x)$$

Remarque : A partir ce cet instant, nous avons plusieurs possibilités pour résoudre les questions suivantes. Tout d'abord nous avons deux formules de récurrences pour démontrer certaines choses sur Pn (par exemple son dégré, son coefficient dominant, ses racines…). On peut utiliser :

$$P_{n+1}(X) = (X^2+a^2)P_n'(X) - 2nXP_n(X)$$

$$P_{n+1}(X) = -2nXP_n(X) - n(n-1)(X^2+a^2)P_{n-1}(X)$$

Nous déduisons aussi de ces deux formules de récurrence une nouvelle égalité :

$$(X^2+a^2)P_n'(X) = -n(n-1)(X^2+a^2)P_{n-1}(X)$$

$$\Longrightarrow (X^2+a^2)[P_n'(X) + n(n-1)P_{n-1}(X)] = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$\Longrightarrow P_n'(X) + n(n-1)P_{n-1}(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}\ (par\ intégrité\ de\ \mathbb{R}[X])$$

$$\Longrightarrow P_n'(X) = -n(n-1)P_{n-1}(X)$$

Dans certaines questions qui suivent, je vais utiliser les trois formules pour prouver les questions par 3 raisonnements différents. A vous de choisir celle qui vous semble la plus « facile » pour vous ! Sachez seulement qu'un seul raisonnement suffit ! Bien évidemment !

c)

- **Raisonnement 1** : Par récurrence double si on utilise la formule de récurrence :
$$P_{n+1}(X) = -2nXP_n(X) - n(n-1)(X^2+a^2)P_{n-1}(X)$$
- **Raisonnement 2** : En remarquant que :
$$P_n'(X) = -n(n-1)P_{n-1}(X)$$

Raisonnement 1 : On raisonne par récurrence double.

On pose : $\forall n \geq 1, \mathcal{R}_n : "\forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^{n+1}P_n(x)"$

Initialisation : On a :
$$P_1(X) = a \text{ et } P_2(X) = -2aX$$
On en déduit donc que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_1(-x) = P_1(x) \text{ et } P_2(-x) = -P_2(x)$$
Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$ *et* $n = 2$.

Hérédité : On pose un entier $n, n \geq 1$. On suppose la propriété est vraie au rang n *et* $n+1$. On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_n(-x) = (-1)^{n+1}P_n(x) \\ P_{n+1}(-x) = (-1)^{n+2}P_{n+1}(x) \end{cases}$$
On sait d'après la question précédente que :
$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+2}(x) = -2(n+1)xP_{n+1}(x) - (n+1)n(x^2+a^2)P_n(x) \\ \Longrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+2}(-x) = 2nxP_{n+1}(-x) - (n+1)n((-x)^2+a^2)P_n(-x) \\ &= 2nx(-1)^nP_{n+1}(x) - (n+1)n(x^2+a^2)(-1)^{n-1}P_n(x) \\ &= (-1)^{n+1}\big(-2nxP_{n+1}(x) - (n+1)n(x^2+a^2)P_n(x)\big) \\ &= (-1)^{n+1}P_{n+2}(x) \end{aligned}$$
Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence double.

On en déduit que P_n est paire lorsque n est impair et est impaire lorsque n est paire.

Raisonnement 2 : On raisonne par récurrence simple.

Initialisation :

On a :
$$P_1(X) = a$$
On en déduit donc que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_1(-x) = P_1(x)$$
Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : On pose un entier $n, n \geq 1$. On suppose la propriété est vraie au rang n. On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^{n-1}P_n(x)$$
Or on sait que :
$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = -\frac{1}{n(n-1)}P_n'(x) \\ \Longrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(-x) = -\frac{1}{n(n-1)}P_n'(-x) \end{aligned}$$
Or on sait d'après l'hypothèse de récurrence que :
$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^{n-1}P_n(x) \\ \Longrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, -P_n'(-x) = (-1)^{n-1}P'_n(x) \\ \Longrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, n(n-1)P_{n+1}(-x) = -(-1)^{n-1}n(n-1)P_{n+1}(x) \\ \Longrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(-x) = (-1)^nP_{n+1}(x) \end{aligned}$$
Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence simple.

---

d) On peut là encore raisonner de trois façons :

- **Raisonnement 1** : Par récurrence double si on utilise la formule de récurrence :
$$P_{n+1}(X) = -2nXP_n(X) - n(n-1)(X^2+a^2)P_{n-1}(X)$$
- **Raisonnement 2** : Par récurrence simple si on utilise la formule de récurrence :
$$P_{n+1}(X) = (X^2+a^2)P_n'(X) - 2nXP_n(X)$$

- **Raisonnement 3** : En remarquant que :

$$P_n'(X) = -n(n-1)P_{n-1}(X)$$

Raisonnement 1 : On raisonne par récurrence double.
On pose : $\forall n \geq 1, Q_n : "P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]"$
Initialisation :
On a :

$$P_1(X) = a \Longrightarrow P_1 \in \mathbb{R}_0[X]$$
$$P_2(X) = -2Xa \Longrightarrow P_2 \in \mathbb{R}_1[X]$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 1 \; et \; n = 2$.
Hérédité : On pose un entier n, $n \geq 1$. On suppose la propriété vraie au rang n et $n+1$. On a alors :

$$\begin{cases} P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1}\mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$

On sait d'après la question précédente que :

$$P_{n+2}(X) = -2(n+1)XP_n(X) - n(n+1)(X^2 + a^2)P_n(X)$$

Or on a :

$$\begin{cases} P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (X^2 + a^2)P_n(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ 2(n+1)XP_n(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \end{cases} \Longrightarrow P_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$$

Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence double.

Raisonnement 2 : On raisonne par récurrence simple.
On pose :

$$\forall n \geq 1, Q_n : "P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]"$$

Initialisation :
On a :

$$P_1(X) = a \Longrightarrow P_1 \in \mathbb{R}_0[X]$$

Donc $Q(1)$ est vraie.
Hérédité : On pose un entier n, $n \geq 1$. On suppose vraie. On a alors :

$$P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \Longrightarrow P_n' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (X^2 + a^2)P_n'(X) \in \mathbb{R}_n[X] \\ 2nXP_n(X) \in \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$

Or on a :

$$P_{n+1}(X) = (X^2 + a^2)P_n'(X) - 2nXP_n(X)$$

On a donc :

$$P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$$

Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

C'est plus rapide ici, donc on gagne du temps en DS !

Remarque : Je n'y avais pas pensé de prime abord, utilisant directement la question précédente. Merci à Eloïse et à Candice de m'avoir fait remarquer que cela était plus facile ici !

Raisonnement 3 : Directement
On sait d'après les questions précédentes que :

$$P_n'(X) = -n(n-1)P_{n-1}(X)$$
$$\Longrightarrow \deg(P_n) = \deg(P'_n) + 1 = \deg(P_{n-1}) + 1$$

Ainsi $\deg(P_n)$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $\deg(P_1) = 0$. On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 1, \deg(P_n) = n - 1$$

Donc $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Remarque : Dans le raisonnement 3 on est beaucoup plus précis car nous avons démontré que P_n était exactement de degré $n-1$ et non inférieur ou égal à $n-1$. Ce n'était pas demandé mais qui peut le plus peut le moins !
PS : Ce raisonnement j'y ai pensé tout seul ! ^^

Partie C : Etude de P_n
1) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (g_a)^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n}$$

Or on a vu précédemment que :

$$\deg(P_n) \leq n-1 \Longrightarrow \exists (p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \; tel\ que\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k$$

On a donc :

$$\frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{x^{n+1}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{x^{n-1-k}}$$

Or on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^{n+1}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{p_k}{x^{n-1-k}} = p_{n-1} \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} (g_a)^{(n)}(x) = 0 \; (par\ produit)$$

2) On raisonne par récurrence. On pose :

$$\forall n \geq 1, \mathcal{P}(n) : "(g_a)^{(n)}\ s'annule\ au\ moins\ n-1\ fois"$$

Initialisation $n = 1$

${g_a}'$ s'annule au moins 0 fois. C'est immédiat car cela est vraie pour toutes les fonctions !

Hérédité : Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$.

On a alors :

$\exists (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, c_1 < \cdots < c_{n-1}$ tel que :

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!], g_a^{(n)}(a_i) = 0$$

On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ car $g_a^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors :

$$\exists (c_2, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}\ tel\ que\ \left(g_a^{(n)}\right)'(c_i) = 0 = g_a^{(n+1)}(c_i)\ \forall i \in [\![2; n-1]\!]$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_a^{(n)}(x) = 0$$

On applique donc le théorème de Rolle généralisé sur $]-\infty; a_1]$ et donc :

$$\exists c_1 \in]-\infty; a_1[\ tel\ que\ g_a^{(n+1)}(c_1) = 0$$

De même sur $[a_{n-1}; +\infty[$:

$$\exists c_n \in]a_{n-1}; +\infty[\ tel\ que\ g_a^{(n+1)}(c_n) = 0$$

Ainsi $g_a^{(n+1)}$ s'annule au moins n fois. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

3) On a :

$$(g_a)^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n} = 0 \Leftrightarrow P_n(x) = 0$$

Or $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $g_a^{(n)}$ s'annule au plus $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Donc $g_a^{(n)}$ s'annule exactement $n-1$ fois. **Ainsi les racines de sont toutes simples et s'annule exactement fois sur $\mathbb{R}$.**

4) L'énoncé nous donne la réponse donc on peut le faire par récurrence, là encore simple ou double. On peut aussi le faire directement, cela sera mon raisonnement 3 ! Voici l'architecture de ma correction :

- **Raisonnement 1** : Par récurrence double si on utilise la formule de récurrence :

$$P_{n+1}(X) = -2nXP_n(X) - n(n-1)(X^2+a^2)P_{n-1}(X)$$

- **Raisonnement 2** : Par récurrence simple si on utilise la formule de récurrence :
$$P_{n+1}(X) = (X^2 + a^2)P_n'(X) - 2nXP_n(X)$$
- **Raisonnement 3** : Directement en remarquant que :
$$\frac{d}{dx}\big(g_a(x)\big) = \frac{a}{(x^2 + a^2)}$$

Raisonnement 1 : On raisonne par récurrence double.

On raisonne de même par récurrence double. On pose :
$$\forall n \geq 1, \mathcal{P}(n) = "\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}"$$
Initialisation : $n = 1$
On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = a \ et\ P_2(x) = -2ax$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, (-1)^{1-1}(1-1)!\frac{(x+ia)^1 - (x-ia)^1}{2i} = a$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, (-1)^{2-1}(2-1)!\frac{(x+ia)^2 - (x-ia)^2}{2i} = -\frac{x^2 + 2aix - a^2 - (x^2 - 2iax - a^2)}{2i} = -2ax$$
Donc la propriété est vraie au rang $n = 1\ et\ n = 2$.
Hérédité : On pose un entier n, $n \geq 1$. On suppose la propriété vraie au rang $n\ et\ n+1$. On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i} \\ P_{n+1}(x) = (-1)^n(n)!\dfrac{(x+ia)^{n+1} - (x-ia)^{n+1}}{2i} \end{cases}$$
On sait d'après la partie B :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+2}(X) = -2(n+1)xP_n(x) - n(n+1)(x^2+a^2)P_n(x)$$
$$= -2(n+1)x(-1)^n(n)!\frac{(x+ia)^{n+1} - (x-ia)^{n+1}}{2i}$$
$$-n(n+1)(x^2+a^2)n(n+1)(x^2+a^2)(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2i}\left[2x((x+ia)^{n+1} - (x-ia)^{n+1}) - (x+ia)(x-ia)[(x+ia)^n - (x-ia)^n]\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2i}\left[(x+ia)^{n+1}[2x - (x-ia)] - (x-ia)^{n+1}[2x - (x+ia)]\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2i} \times ((x+ia)^{n+2} - (x-ia)^{n+2})$$
Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence double.

Raisonnement 2 : On raisonne par récurrence simple.
On pose :
$$\forall n \geq 1, \mathcal{P}(n) = "\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}"$$
Initialisation :
On a :
On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = a$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, (-1)^{1-1}(1-1)!\frac{(x+ia)^1 - (x-ia)^1}{2i} = a$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : On pose un entier $n \geq 1$, . On suppose vraie. On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}$$
On sait d'après la première question que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (x^2+a^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x)$$
Il faut donc dériver deux fonctions d'une variable réelle à valeur complexe :
$$f_n : x \mapsto (x+ia)^n \ et\ g_n : x \mapsto (x-ia)^n$$

On sait que la dérivée d'une fonction à valeur complexe est la dérivée de sa partie réelle plus fois la dérivée de sa partie imaginaire. On peut montrer par récurrence immédiate que :

$$f_n': x \mapsto n(x+ia)^{n-1} \text{ et } g'_n: x \mapsto n(x-ia)^{n-1}$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (x+ia)(x-ia)P_n'(x) - 2nxP_n(x)$$

$$= (x+ia)(x-ia) \times (-1)^{n-1}(n)! \frac{(x+ia)^{n-1} - (x-ia)^{n-1}}{2i} - 2nx \times (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n)!}{2i}\left[(x+ia)^n[(x-ia)-2x] - (x-ia)^{n-1}[x+ia-2x]\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[(x+ia)^{n+1} - (x-ia)^{n+1}\right]$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

C'est plus rapide ici, donc on gagne du temps en DS !

Remarque : Pauline m'a interloqué sur cette question car elle m'a dit : « utiliser une récurrence c'est un peu triché » ! Cela n'est pas du tout triché, mais cela sous-entend que l'on a déjà la réponse. La véritable question est : comment peut-on penser à écrire P_n sous cette forme. C'est une excellente question qui amène à plusieurs réponses.
Tout d'abord vous n'êtes pas sûrs de pouvoir le faire à votre niveau, ou bien la conjecture a bien été établie par quelqu'un, soit en cherchant, soit en le faisant par hasard (cela arrive plus souvent qu'on ne le pense !). Il faut donc parfois avoir l'humilité de se dire que nous ne pouvons pas poser cette conjecture, mais c'est souvent un manque de temps ! Mais ici nous pouvons le faire. En voici une démonstration :

- **Raisonnement 3** : Directement en remarquant que :

$$\frac{d}{dx}\big(g_a(x)\big) = \frac{a}{(x^2+a^2)}$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}\big(g_a(x)\big) = \frac{a}{(x^2+a^2)} = \frac{a}{(x+ia)(x-ia)} = \frac{x+ia-(x-ia)}{2i(x+ia)(x-ia)} = \frac{1}{2i} \times \left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia}\right)$$

Ainsi il faut dériver $n-1$ fois ces deux fonctions complexes :

$$f: x \mapsto \frac{1}{x-ia} \text{ et } g: x \mapsto \frac{1}{x+ia}$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-ia)^{-1} \Longrightarrow f'(x) = -(x-ia)^{-2} \Longrightarrow f''(x) = 2(x-ia)^{-3}$$

On démontre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(x) = (-1)^k(k)!\,(x-ia)^{-(k+1)}$$

On a de même :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = (-1)^k(k)!\,(x+ia)^{-(k+1)}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n}{dx^n}\big(g_a(x)\big) = \frac{1}{2i} \times \left(f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \times \left((-1)^{n-1}(n-1)!\,(x-ia)^{-n} - (-1)^{n-1}(n-1)!\,(x-ia)^{-n}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}(-1)^{n-1}(n-1)! \times \left(\frac{1}{(x-ia)^n} - \frac{1}{(x+ia)^n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \times \frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{P_n(x)}{(x^2+a^2)^n}$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i}$$

5) Il suffit de voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+ia)^n - (x-ia)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ia)^{n-k} x^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-ia)^{n-k} x^k$$

$$= x^n - x^n + \binom{n}{1} (ia+ia) x^{n-1} + R_n(x) \ avec \deg(R_n) \leq n-2$$

$$= 2ianx^{n-1}$$

Ainsi P_n est de degré $n-1$ (déjà vu précédemment grâce au raisonnement 3 de la question 2) d) de la partie B).

De plus on a :

$$P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{(x+ia)^n - (x-ia)^n}{2i} = (-1)^{n-1} n!\, a + Q_n(x) \ avec \deg(Q_n) \leq n-2$$

Ainsi on en déduit que :

$$\deg(P_n) = n-1 \ et \ CD(P_n) = (-1)^{n-1} n! \times a$$

6) On a :

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+ia)^n = (x-ia)^n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+ia}{x-ia}\right)^n = 1 \ avec \ x \neq ia$$

$$\Leftrightarrow x + ia = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(x-ia) \ et \ x \neq ia \ et \ k \in [\![0; n-1]\!]$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -ia\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) et \ k \in [\![1; n-1]\!] \ car \ si \ k = 0, x = -ia$$

$$\Leftrightarrow -2isin\left(\frac{k\pi}{n}\right) x = -iacos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \times \frac{cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in [\![1; n-1]\!] \ (car \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0 \ avec \ k \in [\![0; n-1]\!])$$

On a alors :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P_n(X) = (-1)^{n-1} n! \times a \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \frac{1}{2} \times \frac{cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$$