Correction DM n°5

Exercice 1 : Une suite classique

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1) Déterminer le $DL_2(0)$ de f.

2) a) En déduire que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donnera la valeur de $f'(0)$.

b) Etudier la position de f avec sa tangente (notée (T_0)), au point d'abscisse $x = 0$. On fera un graphique pour représenter cette position !

c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

(***Indice*** : *On pourra montrer que* 0 *n'est pas solution de cette équation*).

5) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

6) On pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n} - 1} \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0;1[$$

b) En déduire que :

$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$$

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

1) On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Longrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) = \boldsymbol{1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)}$$

2) a) Comme f admet un $DL_2(0)$, elle admet un $DL_1(0)$.

De plus on a :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

Donc f est continue, dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

b) D'après le $DL_1(0)$ on a :

$$(T_0): y = 1 - \frac{1}{2}x$$

De plus on a :

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{12} x^2}$$

Ainsi au voisinage de 0, f est au-dessus de sa tangente.
c) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

Par composée, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^1$, sur chaque intervalle $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$.
De plus on a :

$$f'(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x - x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

Ainsi on a :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On aurait pu utiliser le calcul de f' en dehors de 0, puis chercher la limite en 0. On aurait trouver $-\frac{1}{2}$ et on aurait pu conclure que $f'(0)$ existe et vaut $-\frac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème de la limite-dérivée.

3) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

Etudions le signe de $x \mapsto e^x - 1 - xe^x$ sur $\mathbb{R}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$$

On a ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	0	↘	
$f'(x)$			$-$		
f			↘		

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) On a $f(0) = 1$ donc 0 n'est pas solution de cette équation.
De plus sur $\mathbb{R}^*$:

$$\boldsymbol{f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \ln(2)}$$

5) On a :

$$\forall x \geq 0, f'(x) < 0$$

Montrons que :

$$\forall x \geq 0, -\frac{1}{2} \leq f'(x)$$

On a :

$$\forall x \geq 0, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} = \frac{u(x)}{2(e^x - 1)^2}$$

On a :

$$\forall x \geq 0, u'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - x - 1) \geq 0 \; (par\ convexité)$$

On en déduit donc que u est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $u(0)=0$. On a donc :

$$\forall x \geq 0, u(x) \geq 0 \Longrightarrow f'(x) \geq -\frac{1}{2}$$

Ainsi on a :

$$\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

6) a) On fait une récurrence.

Initialisation : On a $u_0 \in]0;1[$. C'est immédiat.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, fixé$. On suppose que :

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 1 &\Longrightarrow f(1) < f(u_n) < f(0)\ (car\ f\ décroissante\ sur\ ]0;1[) \\ &\Longrightarrow 0 < \frac{1}{e-1} < u_{n+1} < 1 \\ &\Longrightarrow u_{n+1} \in]0;1[\end{aligned}$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence !

b) f est continue et dérivable sur $]0;1[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in]0;1[^2, x \neq y, \exists\, c_{x,y} \in]0;1[\ tel\ que\ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c_{x,y})$$

Or d'après la question 5 on en déduit que :

$$\forall x \in]0;1[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x,y) \in]0;1[^2, x \neq y, \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \forall (x,y) \in]0;1[^2, |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

Or on a démontré précédemment à la question 6) $a)$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0;1[$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|}$$

c) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| &\leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \ln(2)| \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times |u_{n-2} - \ln(2)| \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times |u_{n-3} - \ln(2)| \\ &\vdots\ en\ réitérant\ le\ précédé \\ &\leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \ln(2)| \end{aligned}$$

Or on a :

$$e - 1 > 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \lim_n \left[\frac{1}{2}\right]^n = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$\lim_n |u_n - \ln(2)| = 0$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{\lim_n u_n = \ln(2)}$$

Exercice facultatif : Problème 1 : Irrationnalité de ln(2)

Partie A : Une suite qui converge vers $\boldsymbol{ln}(2)$

Dans toute cette partie on pose :

$$\mathrm{I_n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{t^n}}{1+\mathrm{t}}\mathrm{dt}$$

1) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}+1} = \ln(2) - (-1)^{\mathrm{n}+1}\mathrm{I_{n+1}}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathrm{I_{n+1}} \leq \frac{1}{\mathrm{n}+2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$\mathrm{S} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}+1} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}+1}$$

Partie B : Critère de d'Alembert

On veut montrer le théorème suivant :
Soit $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \; avec \; \ell < 1 \Longrightarrow u_n \to 0$$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose de plus que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \; avec \; 0 \leq \ell < 1$$

1) Démontrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel \; que \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 0 < v_n < 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3) Démontrer que la suite (u_n) converge, puis que sa limite est 0.
4) La réciproque du théorème est-elle vraie ?

Partie C : Irrationalité de $\ln(2)$

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (\mathrm{p},\mathrm{q}) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \text{ et } \mathrm{p} \wedge \mathrm{q} = 1$$

On pose de même :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{J_n} = \frac{1}{\mathrm{n}!}\int_{-1}^{1} (1-\mathrm{t}^2)^{\mathrm{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{t}\ln(2)}\mathrm{dt}$$

1) Calculer $\mathrm{J_0}$ et $\mathrm{J_1}$.
2) Montrer que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{J_n} > 0$$

3) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{D} \in \mathbb{R}, \mathrm{D^n J_n} \to 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{J_{n+2}} = \frac{4\mathrm{q}^2}{\mathrm{p}^2}\mathrm{J_n} - \frac{(4\mathrm{n}+6)\mathrm{q}^2}{\mathrm{p}^2}\mathrm{J_{n+1}}$$

5) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers $\mathrm{A_n}$ tel que :

$$\mathrm{J_n} = \left(\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}}\right)^{2\mathrm{n}+1}\left[2\mathrm{A_n}\left(\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{A_n}\left(-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\right)\right]$$

6) Montrer que si $\mathrm{D} = 2\mathrm{p}^3$, alors :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{D^n J_n} \in \mathbb{N}^*$$

7) En déduire l'irrationalité de $\ln(2)$.

Partie A : Etude d'une intégrale

Dans toute cette partie on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto \frac{t^n}{1+t} \in \mathcal{C}^0([0;1])$$

Donc f_n admet une primitive donc I_n est bien définie.

2) On a :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{t^0}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$$

De plus on a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} dt = 1 - \ln(2)$$

3) a) On sait que :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{(1+t)^2 - 2(t+1) + 2}{1+t} dt = \int_0^1 (1+t) - 2 + \frac{2}{1+t} dt$$

On pose $y = 1 + t$

a) Les bornes

$$t = 0 \Longrightarrow y = 1 \text{ et } t = 1 \Longrightarrow y = 2$$

b) Calcul de dt

On sait que $t : y \mapsto y - 1 \in \mathcal{C}^1([1,2])$ et :

$$\frac{dt}{dy} = 1$$

c) On remplace :

$$\int_0^1 (1+t) - 2 + \frac{2}{1+t} dt = \int_1^2 \left(y - 2 + \frac{1}{y}\right) dy$$

b) On a :

$$\int_1^2 \left(y - 2 + \frac{1}{y}\right) dy = [y^2 - 2y + \ln(y)]_1^2 = \ln(2) - 1$$

4) On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} dt = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

Partie B : Convergence d'une série

1) a) Enoncer le critère spécial des séries alternées.

b) Démontrer le critère spécial des séries alternées.

C'est du cours !

2) Démontrer, sans utiliser ce qui a été fait dans la partie A, que la série suivante converge :

$$\left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0. De plus comme (u_n) est alternée, on en déduit donc que (u_n) vérifie le critère spécial des séries alternées ! Donc $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ converge.

3) a) Démontrer que :

On sait que :

$$\forall t \in [0;1], 1 \leq 1+t \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \Longrightarrow \forall t \in [0;1], 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 0 \, dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} \, dt$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) D'après la question précédente, on en déduit donc que :

$$\lim_n I_{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

Partie C : Irrationalité de $\ln(2)$

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt$$

1) On a :

$$J_0 = \frac{1}{0!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^0 e^{t\ln(2)} dt = \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)} dt = \frac{1}{\ln(2)}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\ln(2)}$$

$$J_1 = \frac{1}{1!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^1 e^{t\ln(2)} dt = \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)} dt - \int_{-1}^{1} t^2 e^{t\ln(2)} dt$$

$$= \frac{3}{2\ln(2)} - \left(\left[\frac{t^2}{\ln(2)} 2^t\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} t e^{t\ln(2)} dt\right)$$

$$= \frac{3}{2\ln(2)} - \left(\frac{3}{2\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)}\left(\left[\frac{t}{\ln(2)} 2^t\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)} dt\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\ln(2)}\left(\frac{5}{2\ln(2)} - \frac{2}{\ln^2(2)} \times \frac{3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow J_1 = \frac{5}{\ln^2(2)} - \frac{3}{\ln^3(2)}$$

2) On sait que :

$$\forall t \in]-1;1[, (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} > 0 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt > 0 \Longrightarrow J_n > 0$$

3) On sait que :

$$\forall t \in [-1;1], D^n J_n = \frac{D^n}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt$$

On pose :

$$u_n = \frac{|D|^n}{n!} \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|D|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|D|^n} = \frac{|D|}{n+1} \to 0$$

On en déduit donc d'après le critère de d'Alembert que :

$$\lim_n \frac{|D|^n}{n!} = 0$$

De plus on sait que :

$$\forall t \in [-1;1], 1-t^2 \leq 1 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt \leq \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)} dt = \frac{3}{2\ln(2)}$$

On en déduit donc que :

$$|D^n J_n| \leq \frac{3}{2\ln(2)} |u_n|$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \frac{3}{2\ln(2)} |u_n| = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n D^n J_n = 0$$

4) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n+2} e^{t\ln(2)} dt$$

$$= \frac{1}{(n+2)!} \left(\underbrace{\left[\frac{(1-t^2)^{n+2} e^{t\ln(2)}}{\ln(2)} \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{2(n+2)}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} t(1-t^2)^{n+1} e^{t\ln(2)} dt \right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)!\ln(2)} \left(\underbrace{\left[\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{\ln(2)} \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{1}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n+1} e^{t\ln(2)} dt + \frac{2(n+1)}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt \right)$$

$$= -\frac{2}{\ln^2(2)} J_{n+1} - \frac{4}{n!\ln^2(2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)(1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt + \frac{4}{n!\ln^2(2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt$$

$$= \frac{-2-4(n+1)}{\ln^2(2)} J_{n+1} + \frac{4}{\ln^2(2)} J_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2} J_{n+1}$$

5) On fait une récurrence double. On pose :

$$\mathcal{P}(n) : "J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2} A_n\left(-\frac{p}{q}\right) \right]"$$

Initialisation : $n = 0 : J_0 = \frac{3}{2\ln(2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^1 \left[2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \right] \Longrightarrow \mathcal{P}(0)$ est vraie avec $A_0(X) = 1$

$n = 1 : J_1 = \frac{5}{\ln^2(2)} - \frac{3}{\ln^3(2)} = \frac{5\ln(2)-3}{\ln^3(2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^3 \left[2 \times (2\ln(2) - 2) - \frac{1}{2}(-2\ln(2) - 2) \right] \Longrightarrow \mathcal{P}(1)$ est vraie avec $A_1(X) = 2X - 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose vraie $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \in [\![0; n+1]\!]$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On sait que :

$$J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2} J_{n+1}$$

$$= \frac{4q^2}{p^2} \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right] - \frac{(4n+6)q^2}{p^2}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+3}\left[2A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

$$= \frac{q^2}{p^2}\left[-(4n+6)\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+3}\left(2A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right) + 4\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left(2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right)\right]$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+5}\left[2\left(4\left(\frac{p}{q}\right)^2 A_n\left(\frac{p}{q}\right) - (4n+6)A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(4\left(\frac{p}{q}\right)^2 A_n\left(-\frac{p}{q}\right) - (4n+6)A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right)\right]$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+5}\left[2A_{n+2}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_{n+2}\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

On pose :

$$A_{n+2}(X) = 4X^2A_n(X) - (4n+6)A_{n+1}(X)$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de la récurrence double !

6) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \text{ avec } (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

On a alors :

$$q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right) = a_0q^{2n+1} + a_1pq^{2n} + \dots + a_np^nq^{n+1} \in \mathbb{Z}$$

De même on a : $q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.

On en déduit donc que :

$$D^nJ_n = 2^np^{3n}J_n = 2^np^{3n}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right] = 2^np^{n-1}\left(2q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right)$$

$$= p^{n-1}\left(2^{n+1}\underbrace{q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)}_{\in\mathbb{Z}} - 2^{n-1}\underbrace{q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 1, (2p^3)^nJ_n \in \mathbb{N}^*$$

7) On sait que :

$$\forall n \geq 1, (2p^3)^nJ_n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \forall n \geq 1, (2p^3)^nJ_n \geq 1$$

De plus on sait que :

$$\lim_n (2p^3)^nJ_n = 0$$

Cela est impossible. Donc $\ln(2)$ est un irrationnel !