Programme de colle n°22
(31 mars au 3 avril)

Espace vectoriel de dimension finie

- Base et dimensión d'un ev de dimensión finie
- Théorème de la base extraite, de la base incomplète
- Dimension d'un produit cartésien

Séries numériques

- Définition de $\sum u_n$ converge avec la convergence de la suite des sommes partielles
- Somme géométrique.
- Somme télescopiques

Séries numériques à termes positifs

- Convergence avec majoration des sommes partielles.
- Convergence ou divergence par comparaison (relation d'ordre, notation de Landau, équivalent)
- Comparaison série-intégrale

Remarque : Nous n'avons pas fait beaucoup d'exercices sur les séries numériques (jeudi prochain !). Les séries à termes de signe non constant seront abordées la semaine prochaine. On demande surtout aux élèves de comprendre pourquoi on a le droit de sommer indéfiniment des nombres positifs tout en restant dans $\mathbb{R}$. On pourra demander une comparaison série-intégrale, un critère de d'Alembert ou par équivalent !

Démo de cours

Propriété I.b.4 (Théorème de la base incomplète) : Soit E un ev de dimension finie. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E, espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{F}$ peut être complété en une base de E :
$\exists (e_{p+1}, \dots, e_n) \in E^{n-p}, (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E.

Propriété III.b.4 (Formule de Grassman) : Pour tout sev F et G de E ev quelconque. On a :
$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Propriété :
$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge et } \sum \frac{1}{n} \sim \ln(n)$$

Propriété III.a.1 : Soit $(\sum u_n)$ une série à **termes positifs**. On suppose que :
$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \geq 0$$
On a alors :
$(1) \ell < 1 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ converge
$(2) \ell > 1 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ diverge
$(3) \ell = 1 \Longrightarrow$ On ne peut rien conclure.

Exercices du type

Application III.b.5 : On pose
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$
Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Exercice B.10 : On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(0) = P(1)\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice A.2 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$$

Exercice A.4 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

Exercice A.6 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$