

Chapitre 23 : Applications linéaires
Partie B : Isomorphismes
I) Isomorphismes et automorphismes
a) Isomorphismes

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est un isomorphisme si f est bijective.

Application I.a.1 : On pose

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(0), P(1), P(2)) \end{cases}$$

Montrer que f est un isomorphisme.

Propriété I.a.2 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux isomorphismes. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ est aussi un isomorphisme.

Rappel : Pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, il faut montrer que f est linéaire, injective et surjective. Pour cela on peut montrer que :

- $\text{Im}(f) = F$
- $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$

Application I.a.3 : Montrer que l'application suivante n'est pas un isomorphisme :

$$D: \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$$

b) Automorphismes

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est bijective, on dit que f est un automorphisme de E . On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E . C'est le groupe linéaire de E .

Exemple I.b.1 : On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - y; x + 2y) \end{cases}$$

Montrer que $g \in \text{GL}(\mathbb{R}^2)$.

Application I.b.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

II) Isomorphisme en dimension finie
a) Image d'une base

Propriété II.a.1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. On a alors :

- (1) f est injective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F
 (2) f est surjective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice dans F
 (3) f est bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F

Remarque : Pour déterminer l'image $\text{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il suffit de regarder l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille génératrice de E .

Exemple II.a.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto 2P - XP' \end{cases}$$

Déterminer $\text{Im}(f)$

Application II.a.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X) + P'(X) \end{cases}$$

Montrer que $f \in \text{GL}(\mathbb{R}_n[X])$.

b) Même dimension

Propriété II.b.1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On a alors :
 f est bijective $\Rightarrow \dim(E) = \dim(F)$

Application II.b.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n-2}[X] \\ P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas un isomorphisme.

Propriété I.b.3 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie de même dimension et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors équivalence entre :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

Application I.b.4 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{cases}$$

Montrer que f est un isomorphisme.

c) Réciproque d'un isomorphisme

Propriété II.c.1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie **de même dimension**. On a équivalence entre :

(1) f est un isomorphisme

(2) $\exists g \in \mathcal{L}(F, E)$ $g \circ f = \text{Id}_E$

(3) $\exists h \in \mathcal{L}(F, E)$ $f \circ h = \text{Id}_F$

g est appelé inverse à gauche et h inverse à droite. De plus g et h coïncident et on note :

$$g = h = f^{-1}$$

Attention : Cette propriété n'est pas vraie en dimension infinie, ou si E et F n'ont pas même dimension.

Contre-exemple II.c.2 : On pose :

$$D: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases} \text{ et } P: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ Q \mapsto \int_0^x Q(t) dt \end{cases}$$

d) Espaces isomorphes

Propriété II.d.1 : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose $\phi_i: E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\phi_i: \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda_i \text{ (la } i\text{-ième coordonnée de } x \text{ dans la base } B) \end{cases}$$

Alors pour tout i dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, ϕ_i est une forme linéaire.

Propriété II.d.2 : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose :

$$\varphi: \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x \mapsto \varphi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)) \end{cases}$$

Alors φ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Définition : On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme f entre E et F . On note alors :

$$E \simeq F$$

Remarque : $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels (réflexive, transitive et symétrique).

Exemple II.d.3 : Montrer que les espaces vectoriels $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes.

Propriété II.d.4 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel. Alors :

$$E \simeq F \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$$

Application II.d.5 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose :

$$S_{a,b,c} = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), ay'' + by' + cy = 0\}$$

Alors $S_{a,b,c}$ est de dimension 2.

Application II.d.6 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$. On pose :

$$U_{a,b,c} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\}$$

Alors $U_{a,b,c}$ est de dimension 2.