

Chapitre 23: Applications linéaires

Partie D : Rang d'une application linéaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriels.

I) Rang d'une application linéaire

a) La dimension finie

Propriété I.a.1 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriels, dont au moins l'un des deux est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors $\text{Im}(f)$ de dimension finie et :

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

Définition : Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriels, dont au moins l'un des deux est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f , noté $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Exemple I.a.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y; x - z; y + z) \end{cases}$$

Déterminer le rang de f .

Exemple I.a.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X) \end{cases}$$

Déterminer le rang de f .

b) Invariance du rang

Propriété I.b.1 : Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $g \in \mathcal{L}(G, E)$ et $h \in \mathcal{L}(F, G)$ deux **isomorphismes**. On a alors :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(h \circ f)$$

c) Théorème du rang

Propriété I.c.1 (Théorème du rang) : Soit E de dimension finie, F quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors tout supplémentaire de $\ker(f)$ dans E est isomorphe à $\text{Im}(f)$:

$$E = \ker(f) \oplus S \implies S \simeq \text{Im}(f)$$

Propriété I.c.2 (Théorème du rang 2) : Soit E de dimension finie, F quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

Application I.c.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y; x - z; y + z) \end{cases}$$

Déterminer $\text{rg}(f)$.

d) Applications au noyau d'une forme linéaire

Propriété I.d.1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire avec E de dimension finie. Alors on a :

$$\dim(\ker(f)) = \begin{cases} \dim(E) & \text{si } f = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})} \\ \dim(E) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Application I.d.2 : On pose :

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$$

Déterminer la dimension de F.

Propriété I.d.3 : Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

(1) H est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

(2) Si $H = \text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\psi)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\phi = \lambda \cdot \psi$

II) Equations linéaires

a) Un classique

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriel. Soit $b \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle équation linéaire d'inconnue toute équation de la forme $f(x) = b$.

Remarque : Si $b = 0_F$ on dit que l'équation est homogène. On appelle équation homogène associée à b l'équation $f(x) = 0_F$.

Exemple II.a.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y; x - z; y + z) \end{cases}$$

Résoudre l'équation homogène $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Propriété II.a.2 : Soit $f(x) = b$ une équation homogène. On a alors :

(1) L'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène $f(x) = 0_E$ est $\text{ker}(f)$

(2) L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = b$ est non vide si et seulement si $b \in \text{Im}(f)$ et on a alors :

$$S = x_0 + \text{ker}(f)$$

Avec x_0 une solution particulière de $f(x) = b$.

Exemple II.a.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y; x - z; y + z) \end{cases}$$

Résoudre l'équation $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Formes linéaires et équations linéaires

Remarque : On pose un système homogène à n équations et p inconnues :

$$(E): \begin{cases} a_{1,1} \mathbf{x}_1 + a_{1,2} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{1,p} \mathbf{x}_p = 0 \\ a_{2,1} \mathbf{x}_1 + a_{2,2} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{2,p} \mathbf{x}_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1} \mathbf{x}_1 + a_{n,2} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{n,p} \mathbf{x}_p = 0 \end{cases}$$

On pose :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \phi_i(x_1, \dots, x_p) = a_{i,1} \mathbf{x}_1 + a_{i,2} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{i,p} \mathbf{x}_p$$

ϕ_i est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. Ainsi l'ensemble des solutions du système correspond à l'intersection des hyperplans $\text{Ker}(\phi_i)$:

$$S = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \text{Ker}(\phi_i)$$