

Fiche exercices 22 : Séries numériques

Partie A : Généralités

Exercice A.1 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \frac{1}{n^2 - 1} &= \frac{1}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \\ &\Rightarrow S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &\Rightarrow \lim_n \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exercice A.2 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right) = \ln((n+1)^2) - \ln(n(n+2))$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln((k+1)^2) - \ln(k(k+2))) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k(k+2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) \\
&= \ln(2) + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\
&\Rightarrow \lim_n \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \ln(2) \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \ln(2)
\end{aligned}$$

Exercice A.3 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

On décompose en **éléments simples** :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} \\
\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2(a+b+c) + n(3a+2b+c) + 2a}{n(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Exercice A.4 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = 4 \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ \Rightarrow \lim_n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} &= \frac{16}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

Exercice A.5 : Déterminer la nature de :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\text{sh}(n)}{\text{ch}(n)}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\text{sh}(n)}{\text{ch}(n)} = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \rightarrow 1$$

On en déduit que :

$$\lim_n \frac{\text{sh}(n)}{\text{ch}(n)} \neq 0$$

Donc la série **diverge grossièrement !**

Exercice A.6 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) &= \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right) \cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} = \sum_{k=1}^n \left(\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \tan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) = \tan(1) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_n \tan\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right) \cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} = \tan(1)$$

On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan(1)$$

Partie B : Séries à termes positifs

Exercice B.1 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A) } \sum_{n \geq 2} \frac{n}{n^2 + 1} ; \text{ B) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - \ln(n)} ; \text{ C) } \sum_{n \geq 2} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A) On pose :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

On a :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n}$$

Or on sait que :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}\right) \text{ diverge} \\ \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 1}\right) \text{ diverge}$$

B) On pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2 - \ln(n)}$$

On a :

$$u_n = \frac{1}{n^2 - \ln(n)} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n^2}}$$

On en déduit que :

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n^2}} \rightarrow 1$$

On en déduit que :

$$u_n = \frac{1}{n^2 - \ln(n)} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or on sait que :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}\right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln(n)}\right) \text{ converge}$$

c) On pose :

$$u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On sait que :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$$

On en déduit donc que :

$$u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim n \times \frac{1}{n^2} \\ \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{n}$$

Or on sait que :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right) \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} n \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \text{ diverge}$$

Exercice B.2 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A) } \sum_{n \geq 0} \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} ; \text{ B) } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n} ; \text{ C) } \sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) (\ln(n))^{1000}$$

A) On pose :

$$u_n = \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$$

On a :

$$u_n = \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} = \frac{1 + e^{-2n}}{e^n(1 + e^{-4n})}$$

On en déduit que :

$$u_n \times e^n = \frac{1 + e^{-2n}}{1 + e^{-4n}} \rightarrow 1$$

On a donc :

$$u_n \sim e^{-n}$$

$$\Rightarrow u_n \sim \left(\frac{1}{e} \right)^n$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{e} \in]-1; 1[$$

On en déduit donc que :

$$\left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{e} \right)^n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \right) \text{ converge}$$

B) On pose :

$$u_n = \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$$

On a :

$$u_n e^{\frac{n}{2}} = \frac{n^2 \ln(n)}{e^{\frac{n}{2}}} = \frac{n^2}{e^{\frac{n}{4}}} \times \frac{\ln(n)}{e^{\frac{n}{4}}} \rightarrow 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On en déduit donc que :

$$u_n = o \left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^n \right)$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \in]-1; 1[$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^n \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n} \text{ converge}$$

C) On pose :

$$u_n = \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) \ln^{1000}(n)$$

On a :

$$\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right)$$

On en déduit donc que :

$$\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \ln^{1000}(n) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \ln^{1000}(n)$$

On a donc :

$$u_n \times n^{1,5} \sim \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \ln^{1000}(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On a donc :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right)$$

Or on sait d'après le critère de **Riemann** que :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1,5}}\right) \text{ converge car } 1,5 > 1 \\ \Rightarrow & \sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{1000} \text{ converge} \end{aligned}$$

Exercice B.3 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$A) \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2}; B) \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n)}{n^2}; C) \sum_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e\right)$$

A) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* n \geq 2, u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_n \times n^{1,5} &= \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2} \times n^{1,5} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\ln^3(n)} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow u_n &= o\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right) \end{aligned}$$

Or on sait d'après le critère de Riemann que :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1,5}} \text{ converge} \\ \Rightarrow & \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2} \text{ converge} \end{aligned}$$

B) On pose :

$$u_n = \frac{\arctan(n)}{n^2}$$

On sait que :

$$\lim_n \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$\frac{\arctan(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or on sait d'après le critère de Riemann que :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge} \\ \Rightarrow & \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2} \text{ converge} \end{aligned}$$

C) On pose :

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} - e$$

ATTENTION : On sait que les équivalents ne passent pas à l'exponentielle :

$$n^2 + n \sim n^2 \text{ et : } \\ e^{n^2+n} \not\sim e^{n^2}$$

Il faut donc faire un développement limité en $\frac{1}{n}$ et non un équivalent !!!

Or on sait que :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} &= e^{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e \times e^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)\right) - e \\ &= \frac{1}{2ne} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}\right) \text{ converge} \\ \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e\right) &\text{ **diverge**} \end{aligned}$$

Exercice B.4 : a) Démontrer la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

b) Montrer que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+, \arctan(u) - \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u - v}{1 + uv}\right)$$

c) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

a) On a :

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

On sait que :

$$u_n \sim \frac{1}{n^2 + n + 1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or on sait que :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge car } 2 > 1 \text{ (critère de Riemann)}$$

Donc :

$$\sum_{n \geq 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) \text{ converge}$$

b) On sait que pour toutes valeurs de a et b réels où l'égalité est définie on a :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+, \tan(\arctan(u) - \arctan(v)) = \frac{\tan(\arctan(u)) - \tan(\arctan(v))}{1 + \tan(\arctan(u))\tan(\arctan(v))}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$$

On a donc :

$$\tan(\arctan(u) - \arctan(v)) = \frac{u - v}{1 + uv}$$

On a donc :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+, \arctan(\tan(\arctan(u) - \arctan(v))) = \arctan\left(\frac{u - v}{1 + uv}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+, \arctan(u) - \arctan(v) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \arctan(\tan(\arctan(u) - \arctan(v))) = \arctan(u) - \arctan(v)$$

On en déduit donc que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+, \arctan(u) - \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u - v}{1 + uv}\right)$$

c) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) &= \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1 + k(k + 1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{(k + 1) - k}{1 + k(k + 1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n (\arctan(k + 1) - \arctan(k)) \\ &= \arctan(n + 1) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \arctan(n + 1) = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice B.5 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n!}$$

On pose :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n!}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* n \geq 3, u_n \times n^2 = \frac{\ln(n)}{n-2} \times \prod_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k} \times \frac{n}{n+1} \leq \frac{\ln(n)}{n-2} \rightarrow 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On en déduit donc que :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n!} \text{ converge}$$

Ici il aurait été plus judicieux d'utiliser le critère de d'Alembert car :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{\ln(n)}{n!}} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

Donc la série converge d'après le critère de d'Alembert !

Exercice B.6 : Soit $\alpha > 1$. Démontrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{\alpha-1}$$

On sait que :

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{n+p+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} \frac{1}{k^\alpha}$$

De plus on sait que :

$$\sum_{k=n}^{n+p+1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_n^{n+p+2} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p+2)^{\alpha-1}} \right)$$

En faisant tendre $p \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$R_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq R_{n-1}$$

On a donc :

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{\alpha-1}$$

D'après le théorème des gendarmes.

Exercice B.7 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On pose :

$$u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On sait que :

$$\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) \geq 0$$

Donc la série est à **termes positifs**.

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \cos(u_n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

De plus on a :

$$\lim_n u_n = \lim_n \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$$

On peut donc effectuer un développement limité de $\cos(u_n)$ à l'ordre 2 :

$$\cos(u_n) = 1 - \frac{(u_n)^2}{2} + o((u_n)^2)$$

On a donc :

$$1 - \frac{(u_n)^2}{2} + o((u_n)^2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{(u_n)^2}{2} + o((u_n)^2)$$

$$\Rightarrow u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}$$

Or on sait que la série $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$ diverge car $\frac{1}{4} < 1$.

Ainsi la série de terme général $u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **diverge**.

Exercice B.8 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

On pose :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

On remarque que u_n est à **terme positif**.

On peut essayer d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

On sait que :

$$\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

On sait aussi le développement limité de $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\ln(1-x) = -x + o(x)$$

On a donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{-1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right) \rightarrow -1 + o(1)$$

On a donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1 + o(1)} \rightarrow e^{-1}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 0, u_n \geq 0 \\ \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1 \end{array} \right.$$

D'après le **critère de d'Alembert**, la série **converge**.

Exercice B.9 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

On pose :

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

On remarque que u_n est à **terme positif**.

On peut essayer d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \rightarrow 4 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 > 1$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 0, u_n \geq 0 \\ \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 > 1 \end{array} \right.$$

D'après le **critère de d'Alembert**, la série **diverge**.

Exercice B.10 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n \ln^3(n)}$$

On veut montrer que :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^3(n)} = \frac{1}{2 \ln^3(2)} + \frac{1}{3 \ln^3(3)} + \frac{1}{4 \ln^3(4)} + \dots + \frac{1}{n \ln^3(n)} + \dots = \ell \in \mathbb{R}^+$$

On pose :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^3(x)} \text{ pour } x \geq 2$$

On va faire une comparaison **série-intégrale** !!

i) On démontre que f est décroissante et positive.

$$\forall x \geq 2, f'(x) = -\frac{\ln^3(x) + 3 \ln^2(x)}{x^2 \ln^2(x)} < 0$$

Donc la fonction f est décroissante et positive !!!

ii) On en déduit la double inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \forall x \in [k-1, k], f(k) \leq f(x) \\ \Rightarrow \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \\ &\Rightarrow \sum_{k=3}^n f(k) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx &= \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx \\ &= \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln^3(x)} dx \\ &= \int_2^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln^3(x)} dx \end{aligned}$$

Rappel :

$$\int \frac{u'}{u^\alpha} = \int u' u^{-\alpha} = \frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1}{u^{\alpha-1}}$$

On a donc :

$$\int_2^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} dx = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{\ln^2(x)} \right]_2^{n+1} = \frac{1}{\ln^2(2)} - \frac{1}{\ln^2(n+1)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n f(k) &\leq \frac{1}{\ln^2(2)} - \frac{1}{\ln^2(n+1)} \\ \Rightarrow \sum_{k=2}^n f(k) &\leq \frac{1}{2 \ln^3(2)} + \frac{1}{\ln^2(2)} - \frac{1}{\ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{2 \ln^3(2)} + \frac{1}{\ln^2(2)} \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles $(\sum_{k=2}^n f(k))$ est croissante et majorée donc elle converge !

Partie C : Séries à termes quelconques

Exercice C.1 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{e^{in}}{n^4} \right)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \frac{e^{in}}{n^4} \\ \Rightarrow |u_n| &= \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

On sait d'après le critère de Riemann que $(\sum \frac{1}{n^4})$ converge car $4 > 1$. On en déduit donc que $(\sum \frac{e^{in}}{n^4})$ est absolument convergente donc **convergente**.

Exercice C.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) \right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) &= \sin\left(\frac{\pi(n^2 + 2n + 1)}{n+1} - \frac{(2n+1)}{n+1}\pi\right) \\ &= \sin\left(\pi - \frac{(2n+1)}{n+1}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)}{n+1}\pi\right) \\ &= \sin\left(2\pi - \frac{1}{n+1}\pi\right) \\ &= -\sin\left(\frac{1}{n+1}\pi\right) \\ &\sim -\frac{1}{n+1}\pi \end{aligned}$$

On sait que $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ **diverge**. On en déduit donc que $\left(\sum \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right)$ diverge.

Exercice C.3 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)$$

On pose :

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, |u_n| = \frac{\ln(n)}{n} = f(n)$$

On pose : $f: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

On sait que f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et :

$$\forall x \geq 2, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

On en déduit donc que f est décroissante sur $[3; +\infty[$. On en déduit donc que $(|u_n|)$ est décroissante à partir de $n \geq 3$.

De plus on a :

$$\lim_n u_n = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On en déduit donc que :

- (u_n) est alternée
- $(|u_n|)$ est décroissante
- $\lim_n u_n = 0$

On en déduit donc, d'après le critère spécial des séries alternées que $\left(\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)$ converge.

Exercice C.4 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}\right)$$

Ici on ne peut pas utiliser le critère des séries alternées car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, |u_n| = \frac{1}{n + (-1)^n}$$

On procède différemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$$

On sait que :

$$\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$

On peut donc faire un développement limité d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} &= 1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \\ \Rightarrow u_n &= \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

1^{er} cas : $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

On a alors :

i) (u_n) est alternée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \times u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

ii) $(|u_n|)$ est décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1}| - |u_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

iii) $\lim_n u_n = 0$

En effet :

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Donc la série $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

2^{ième} cas : $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ converge

C'est le critère de Riemann.

3^{ième} cas : $\left(\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ converge

C'est aussi le critère de Riemann.

On en déduit donc que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\right)$ converge.

Partie D : Un peu plus dur

Exercice B.1 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \sin\left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right)\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right)$$

On sait que :

$$n^3 + 1 = n(n^2 + 1) - n - 1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} = n - \frac{n + 1}{n^2 + 1} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \sin\left(\pi\left(n - \frac{n + 1}{n^2 + 1}\right)\right) \\ &= -\sin\left(\frac{n + 1}{n^2 + 1}\pi\right) \\ &\Rightarrow u_n \sim -\frac{1}{n}\pi \end{aligned}$$

On sait que la série $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge donc $\left(\sum \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\right)$ diverge.

Exercice B.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}\right)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n &= \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \frac{1}{n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

On sait que la série $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge d'après le critère des séries alternées. On en déduit donc que :

Si $\left(\sum u_n\right)$ converge alors il en serait de même de $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$. Or comme nous le savons cette suite diverge. Donc la suite $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

Exercice B.3 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right)$$

On pose :

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

On sait que :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Si $\alpha > 1$ alors la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right)$ converge.

Si $\alpha \leq 0$ alors :

$$\lim_n u_n \neq 0$$

Donc la série diverge grossièrement.

Soit $0 < \alpha \leq 1$

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{(-1)^n}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \end{aligned}$$

On sait que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge d'après le critère spécial. On en déduit donc que :

$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}\right)$ **converge** si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$ d'après le critère de Riemann.

Exercice B.4 : a) Soit x réel et n un entier naturel. Montrer que :

$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que la série suivante converge :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

Puis calculer sa somme.

c) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, t > 0, \sum_{k=0}^n (-t)^{2k} &= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + t^2} - \sum_{k=0}^n (-t)^{2k} &= \frac{(-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} \\ \Rightarrow \forall x \geq 0, \int_0^x \left(\frac{1}{1 + t^2} - \sum_{k=0}^n (-t)^{2k} \right) dt &= \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt \\ \Rightarrow \left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| &\leq \left| \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^x \left| \frac{(-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^x t^{2n+2} dt \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

On fait de même avec $x < 0$.

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On peut voir que si $|x| > 1$ alors $\lim_n |u_n| = +\infty$ donc la série converge grossièrement.

Si $x \in]-1; 1]$ alors la série vérifie le critère spécial donc est convergente.

Si $x = -1$ alors $u_n(x) = \frac{1}{2n+1}$ donc la série diverge.

On en déduit donc que :

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right) \text{ converge si et seulement si } x \in]-1; 1]$$

On sait que :

$$\forall x \in]-1; 1], \text{ on a } \lim_n \left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \lim_n \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_n \left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1; 1], \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$$

c) Il suffit de prendre $x = 1$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$