Programme de colle n°23
(7 au 11 avril)

Séries numériques

- Définition de $\sum u_n$ converge avec la convergence de la suite des sommes partielles
- Somme géométrique, exponentielle.
- Somme télescopiques

Séries numériques à termes positifs

- Convergence avec majoration des sommes partielles.
- Convergence ou divergence par comparaison (relation d'ordre, notation de Landau, équivalent)
- Comparaison série-intégrale

Séries à termes non constants et complexes

- Absolument convergence implique la convergence
- La réciproque est fausse (contre-exemple !)

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire
- Image et noyau d'une application linéaire

Remarque : Nous n'avons pas encore vu le rang d'une application linéaire ni fait beaucoup d'exercices sur les applications linéaires. Il est important que les élèves sachent démontrer qu'une application est linéaire, et trouver le noyau et l'image (nous avons juste fait des exemples en cours). Je rappelle aussi que le critère des séries alternées n'est plus au programme, mais nous avons fait des exemples dans le cours et en exercices !

Démo de cours

Propriété :

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge et } \sum \frac{1}{n} \sim \ln(n)$$

Propriété : On a :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Exemple I.b.3 : Montrer que la série est convergente mais pas absolument convergente.

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Propriété III.a.2 (image directe) : Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et E' un sev de E. On pose :

$$f(E') = \{y = f(x); x \in E'\}$$

Alors *f(E')*, appelé l'image directe de E', est un sous-espace vectoriel de F.

Propriété III.b.1 (Image réciproque) : Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et F' un sev de F. On pose :

$$f^{-1}(F') = \{x \in E; f(x) \in F'\}$$

Alors $f^{-1}(F')$, appelé l'image réciproque de F', est un sous-espace vectoriel de E.

Exercices du type

Donner la dimension de $S_n(\mathbb{R})$, de $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}, x + 2y + z = 0\right\}$, $\{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$, $\{M \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$, en donnant une base de ces espaces vectoriels !

Exercice A.2 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$$

Exercice B.8 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}, u_n = \frac{1}{n\ln^3(n)}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

Exercice A.2 : Démontrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto \big(P(0); P(2)\big) \end{cases}$$

$$A \in M_n(\mathbb{R});\ g_A: \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$$

Exercice B.1 : Montrer que f est linéaire et déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y+z, x-y+z, 2x+2z) \end{cases}$$

Application I.a.1 : On pose

$$\mathrm{f}: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto \big(P(0), P(1), P(2)\big) \end{cases}$$

Montrer que f est un isomorphisme.
(Nous n'avons pas encore vu de propriétés sur les isomorphismes, notation avec la comparaison des dimensions !).