DM n°6

Exercice 1 : Suites imbriquées et application linéaire

Soient $\left((u_n),(v_n),(w_n)\right) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - w_n \\ v_n = 2u_n + 4v_n + 2w_n \\ w_n = -u_n + 3w_n \end{cases}$$

1) Ecrire un programme Python $simul(n,a,b,c)$ qui renvoie sous forme de trois listes les valeurs prises par les trois suites de 0 à n, avec $u_0 = a, v_0 = b\ et\ w_0 = c$.

$$u = [a, u_1, \dots, u_n], v = [b, v_1, \dots, v_n], w = [c, w_1, \dots, w_n]$$

2) Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}) = f\left((u_n, v_n, w_n)\right)$$

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n, w_n) = f^n\left((u_0, v_0, w_0)\right)$$

Il nous reste à déterminer f^n.
Dans toute la suite on pose :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$$

De même on définie $Sp(f)$, noté le spectre de f, par :

$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}\ tel\ que \dim(E_\lambda) \geq 1\}$$

4) a) Déterminer $Sp(f)$ puis déterminer une base pour chaque $E_\lambda, \lambda \in Sp(f)$.

b) Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$$

c) Décomposer le vecteur $e = (x, y, z)$ dans une base adaptée à $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$.

d) En déduire une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de $u_0, v_0\ et\ w_0$.

Problème 1: Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie A : Convergence de deux suites

On considère les deux suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n\ et\ v_n = \ln(u_n)$$

1) Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.

2) En déduire que (v_n) converge *(On pourra montrer que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge).*

3) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie II : Calcul de la constante k

Dans cette partie on souhaite prouver que $k = \sqrt{2\pi}$.
On pose la suite $(\mathrm{W_n})$ définie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathrm{W_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$$

1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W_n}$$

b) En déduire que :

$$\forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{2\mathrm{n}} = \frac{(2\mathrm{n})!}{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2} \times \frac{\pi}{2}\ et\ \mathrm{W}_{2\mathrm{n}+1} = \frac{(2^{\mathrm{n}}\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!} = \frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!}$$

2) Démontrer que la suite nW_nW_{n+1} est constante.

3) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)^2 \sim \pi$$

4) Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.

Problème facultatif

Après avoir démontré l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans le cours, de e et de $\ln(2)$ dans les précédents devoirs, je vous propose ici de démontrer l'irrationnalité de π. Pour ce faire nous allons utiliser un vieux résultat :

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie B : Irrationalité de π

Dans un premier temps nous allons montrer que π^2 est irrationnel.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}, P_n(X) = \frac{X^n(1-X)^n}{n!}$$

1) a) Déterminer les valeurs de $(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} a_{n+k}\, X^{n+k}$$

b) Démontrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) = \begin{cases} 0\ si\ i \leq n-1 \\ 0\ si\ i > 2n \\ a_i \times (i) \times \ldots \times (n+1)\ si\ i \in [\![n; 2n]\!] \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$$

d) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(1) \in \mathbb{Z}$$

(***Indice* : On pourra remarquer que $Pn(X) = P_n(1-X)$**)

Dans les questions suivantes on veut montrer que π^2 est un irrationnel et l'on va raisonner par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, b \neq 0, tel\ que\ \pi^2 = \frac{a}{b}$$

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n(X) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(X)\right)$$

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$$

De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \pi \int_0^1 a^n P_n(x)\sin(\pi x)\, dx$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},, \forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)$$

Puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathbb{Z}$$

3) On pose la suite :

$$u_n = \frac{a^n}{n!} \ (où\ a = \pi \times b\ définie\ précédemment)$$

a) Montrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel\ que\ \forall n \geq n_0, \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{2}$$

b) Montrer que !

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

c) Démontrer que :

$$\forall n \geq n_0, A_n \in]0;1[$$

d) En déduire que π^2 est irrationnel, de même que π.