Programme de colle n°25
Du 5 au 9 mai

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire
- Image et rang d'une application linéaire
- Isomorphismes (égalité des dimensions, espaces isomorphes), injectivité et surjection avec l'image et le noyau.
- Homothéties, projecteurs et symétries

Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble
- Cardinal d'une sous-partie d'un ensemble fini E
- Principe des tiroirs, fonctions injectives, surjectives et cardinal
- Combinaison et arrangement

Matrices d'une application linéaire

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Remarque : Pour les matrices d'une famille de vecteurs, nous avons juste fait la première page de cours (écrire la matrice d'un vecteur dans une base donnée). Vous pouvez donner un petit exercice, comme par exemple écrire la matrice d'un polynôme, d'une matrice, d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$, ou bien la matrice d'une famille de vecteurs. Aucune technicité n'est encore attendue, il s'agit juste de voir si les élèves ont compris !

Démo de cours

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$. On a alors :
(1) f est injective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F
(2) f est surjective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice dans F
(3) f est bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F

Propriété : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$p \text{ est un projecteur } \Leftrightarrow pop = p$$

On a plus précisément $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Propriété : Soient $E = E_1 \oplus E_2$, $s_{E_1} : E \to E$ la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2. On a alors :

- $sos = \mathrm{Id}_E$.
- $E_1 = \mathrm{Inv}(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$
- $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$

Propriété :

$$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)}$$

Exercices de cours

Exercice B.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = Im(f) + Ker(f) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f^2)$$

Exercice B.7 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z) \end{cases}$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice E.5 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x - y - 2z \\ -2x + 3y - 4z \\ -x - y + 3z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur et en déduire ces éléments caractéristiques.

Exercice B.3 : Soit E un ensemble de 10 entiers différents compris entre 1 et 100. Démontrer qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Exercice B.4 : Soit E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples (X,Y) avec : $X \subset Y \subset E$?

Exercice B.5 : Montrer de deux manières différentes que :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \text{tel que } r \leq p + q, \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice B.7 : Soit E un ensemble fini. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}$$