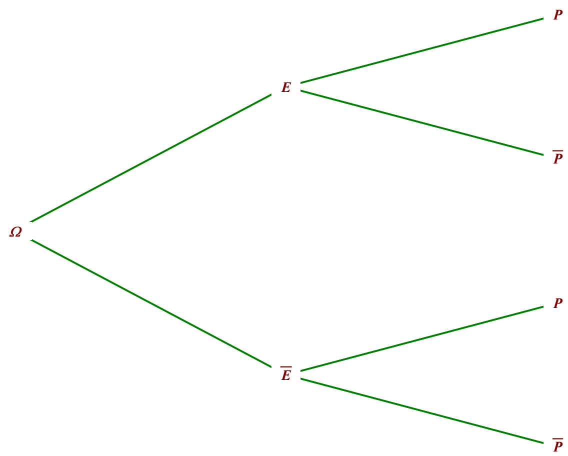
# Chapitre 26 : Probabilités
# Partie B : Probabilité conditionnelle

## I) Probabilité conditionnelle

### a) Un arbre pondéré

**Définition** : En probabilité, il arrive que l´on ne donne pas la probabilité d´un évènement, mais la probabilité de cet évènement sachant qu´un autre est réalisé. C´est ce que l´on appelle des *probabilités conditionnelles*. Cela peut se traduire par un arbre pondéré.

**Exemple I.a.1** : A Liverpool il y a 45% de joueurs étrangers. Parmi ces 45 %, 85% parlent parfaitement anglais.
On pose E = « Le joueur est étranger » et P = « le joueur parle parfaitement anglais ».
On a alors l´arbre ci-contre :




**Notation mathématique** :
On note $P_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B|A)$ la probabilité que B soit réalisé sachant que A est déjà réalisé.

### b) Calcul

**Définition** : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un évènement telle que $\mathbb{P}(B) > 0$. On définit alors l'application :

$$\mathbb{P}_B : \begin{cases} \Omega \to [0;1] \\ A \mapsto \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$$

**Exemple I.b.1**: Une entreprise de voiture constate que leur nouveau modèle peut avoir deux défauts, appelé défaut A et défaut B. On sait que 60% de leur voiture présente le défaut A et 40% présente les deux défauts.
Déterminer la probabilité qu´une voiture présente le défaut B sachant qu´elle a déjà le défaut A.

**Remarque** : On a donc aussi : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

**Exemple I.b.2** : Dans une ville de 10000 habitants, 3000 ont plus de 40 ans.
De plus parmi ceux qui ont plus de 40 ans, 80% ont des enfants. On choisit une personne au hasard.
Quelle est la probabilité d´avoir plus de 40 ans et d´avoir des enfants ?

**Propriété I.b.3 (Formule des probabilités composées)** : Soit $n \geq 2$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$$

On a alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

***Application I.b.4*** : On considère une urne contenant 15 boules blanches et 10 boules rouges. On effectue trois tirages et, à chaque fois, le tirage est sans remise si la boule est blanche et avec remise si la boule est rouge. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?

## c) Formule des probabilités totales

**Définition (partition de l´univers)** : Soit $A_1, \dots, A_n$ n évènements d´une expérience aléatoire d´univers Ω. On dit que Soit $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de l´univers (ou un système complet) si et seulement si :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

**Propriété I.c.1 (Formule des probabilités totales) :** Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition de l´univers d´une expérience aléatoire. Soit B un évènement de cette expérience. On a alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

**Exemple I.c.2**: Dans l´équipe de l´Atletico Madrid, 40% des joueurs ont été au centre de formation, 35% ont été formé dans un autre centre de formation espagnol, le reste ayant été formé en dehors de l´Espagne. 85% des joueurs formés au club ont moins de 25 ans, contre 55% pour ceux formés en Espagne mais pas à l´Atletico et 30% pour ceux formés dans un autre pays.
On choisit au hasard un joueur. Quelle est la probabilité qu´il est moins de 25ans ?

## d) Formule de Bayes

**Propriété I.d.1 (première version)** : Soient A et B deux évènements possibles $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) > 0$. On a alors :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

**Remarque** : Il ne sert à rien d'apprendre cette formule mais plutôt de la retrouver très rapidement !

**Remarque** : Cela permet d'inverser l'arbre, c'est-à-dire de calculer $\mathbb{P}_A(B)$ lorsque l'on connait $\mathbb{P}_B(A)$.

***Application I.d.2*** : On considère une urne contenant 15 boules blanches et 10 boules rouges. On effectue un tirage sans remise si la boule est blanche et avec remise sinon. Au deuxième tirage on tire une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'on est tirée une boule rouge au premier tirage ?

**Propriété I.d.3 (deuxième version)** : Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition de l´univers d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(A_i) > 0$. On a alors :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(B) > 0, \forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}$$

***Application I.d.4*** : Dans un jeu télévisé, trois portes sont fermées. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres, un porte-clé. Le candidat choisit l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle prote cache la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve un porte-clé. Il propose alors au candidat de changer de porte. Que doit faire le candidat ?

# II) Evènements indépendants

## a) Deux évènements

**Définition** : Deux évènements A et B sont dits indépendants si on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On note alors $A \coprod B$.

**Propriété II.a.1** : On a les équivalences suivantes :

$$A \coprod B \Leftrightarrow A \coprod \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \coprod B \Leftrightarrow \bar{A} \coprod \bar{B}$$

**Exemple II.a.2** : Une urne contient 10 boules blanches et 20 boules noires. On tire successivement et avec remise deux fois dans l´urne.
a) Déterminer la probabilité de tirer une noire au deuxième tirage, sachant qu´on a tiré une blanche au premier tirage.
b) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage puis une noire au deuxième tirage ?

## b) Evènements mutuellement indépendants

**Définition** : Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants (ou indépendants) si pour tous sous-ensemble I de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

**ATTENTION** : Une famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ d'évènements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse !!!

**Contre-exemple II.b.1** : On lance un dé 6 deux fois de suite. On définit les évènements :
A = « le premier lancer donne un chiffre pair »
B= « Le deuxième lancer donne un chiffre impair »
C= « L'un des lancers donne un chiffre pair et l'autre impair ».

***Application II.b.2*** : Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$ un entier naturel non nul, décomposé en produit de facteurs premiers. On note $\phi(n)$ (et on appelle indicatrice d'Euler) le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. On se propose de démontrer que :

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme. On tire au hasard un nombre dans $[\![1, n]\!]$.
a) Si d est un diviseur de n, on note $M_d$ l'ensemble des multiples de d dans $\Omega$ et $M'_d$ l'évènement tirer un multiple de d. Calculer $\mathbb{P}(M'_d)$.
b) Montrer que $M'_{p_1}, \ldots, M'_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
c) En déduire la formule pour $\phi(n)$.