Chapitre 26 : Probabilités

Partie A : Probabilités « classiques »

Exercices A.1 : Dix paires de chaussures distinctes sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard quatre chaussures. Quelle est la probabilité :
1) D'obtenir deux paires de chaussures ?
2) D'obtenir au moins une paire de chaussure ?
3) D'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Exercices A.2 : Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :
1) On tire deux boules simultanément.
2) On tire une boule, on ne la remet pas, puis on en tire une autre.
3) On tire une boule, on la remet, puis on en tire une autre.

Exercice A.3 : 1) Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré. Déterminer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2) On considère un lycée de n élèves, $n \leq 365$. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient la même date d'anniversaire. (Aucun élève n'est né le 29 février !).

Partie B : Probabilités conditionnelles

Exercice B.1 : Une urne contient 15 boules : Une noire, 5 blanches et 9 rouges.
1) On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :
a) A = « Le tirage est tricolore ».
b) B = Parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge »
c) C = « Les trois boules tirées sont de la même couleur ».
2) On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer alors les probabilités des évènements A, B et C définis ci-dessus.

Exercice B.2 : Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux dés avec deux dés non truqués. J_1 gagne si la somme des dés donne 6 et J_2 gagne si la somme des dés vaut 7.
1) Quelle est la probabilité pour que J_1 gagne au $n-$ième coup ?
2) Calculer la probabilité p_n pour que J_1 gagne en moins de n coups.
3) Calculer la probabilité q_n pour que J_2 gagne en moins de n coups.
4) Déterminer $\lim p_n$ et $\lim q_n$. Interpréter.

Exercice B.3 : Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :
- S'il fonctionne à la date n-1 $(n \in \mathbb{N}^*)$, il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n.
- S'il passe à la date n-1 $(n \in \mathbb{N}^*)$, il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n.

Où (a, b) est un couple de réels de $[0,1]$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'évènement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.
1) Déterminer p_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice B.4 : Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.
1) Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2) Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

Exercice B.5 : On dispose de N+1 urnes, numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et N-k boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.
1) Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?
2) Calculer la suite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Exercice B.6 : Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.
Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les évènements A_n $(\text{resp.} B_n, C_n)$:
« Le mobile se trouve en A $(\text{resp. en B, en C})$ à l'instant n » et les probabilités correspondantes $a_n = \mathbb{P}(A_n), b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.
2) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \text{ et } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$

4) En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Partie C : Indépendance

Exercice C.1 : On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n-ième lancer ?

Exercice C.2 : Soit n un entier non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
b) Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?

Exercice C.3 : Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$ un entier naturel non nul, décomposé en produit de facteurs premiers. On note $\phi(n)$ (et on appelle indicatrice d'Euler) le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. On se propose de démontrer que :

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme. On tire au hasard un nombre dans $[\![1, n]\!]$.
a) Si d est un diviseur de n, on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω et M'_d l'évènement tirer un multiple de d. Calculer $\mathbb{P}(M'_d)$.
b) Montrer que $M'_{p_1}, \ldots, M'_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
c) En déduire la formule pour $\phi(n)$.