Programme de colle n°26
(12 mai au 16 mai)

Matrices d'une application linéaire

- Matrice d'une application linéaire, d'un vecteur
- Endomorphismes, isomorphismes et matrices de changement de bases.
- Application linéaire canoniquement associée
- Noyau et image d'une matrice
-

Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble
- Cardinal d'une sous-partie d'un ensemble fini E
- Principe des tiroirs, fonctions injectives, surjectives et cardinal
- Combinaison et arrangement

Démo de cours

Propriété :

$$\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$$

Application II.c.3 : on pose :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts}$$

Application II.b.8 : Soit E un ensemble fini. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}$$

Exercices de cours

_ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée
_ Savoir écrire une application linéaire lorsque l'on connait sa matrice dans une base donnée.

Exercice A.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de f.
2) Calculer f^2. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
3) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ puis en déduire une base du noyau et de l'image de f.
4) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice B.3 : Soit E un ensemble de 10 entiers différents compris entre 1 et 100. Démontrer qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Exercice B.4 : Soit E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples (X,Y) avec : $X \subset Y \subset E$?

Exercice B.5 : Montrer de deux manières différentes que :

$$\forall (p,q,r) \in \mathbb{N}^3, \text{tel que } r \leq p+q, \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$