Correction DS 7
Vendredi 3 mai 2024

Exercice 1 : Nature d'une série entière

On pose :

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$$

On cherche à déterminer la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{n^2}$.

1) A l'aide d'une Intégration Par Partie, démontrez que :

$$\int_1^n \ln^2(t)\,dt \sim n\ln^2(n)$$

2) a) Démontrer que $t \mapsto \ln^2(t)$ est continue, positive et croissante sur $[1; +\infty[$.
b) En déduire à l'aide d'une comparaison série-intégrale que :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \sim n\ln^2(n)$$

3) En déduire la nature de la série $\left(\sum \frac{u_n}{n^2}\right)$.

1) On a :

$$\forall n \geq 1, \int_1^n \ln^2(t)\,dt = [t \times \ln^2(t)]_1^n - 2\int_1^n \ln(t)\,dt = n\ln^2(n) - 2\left([t\ln(t)]_1^n - \int_1^n dt\right)$$
$$= n\ln^2(n) - 2n\ln(n) + 2(n-1)$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\int_1^n \ln^2(t)\,dt}{n\ln^2(n)} = 1 - \frac{2}{\ln(n)} + \frac{2}{\ln^2(n)} - \frac{2}{n\ln^2(n)}$$

Or on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{\ln(n)} + \frac{2}{\ln^2(n)} - \frac{2}{n\ln^2(n)} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n} \frac{\int_1^n \ln^2(t)\,dt}{n\ln^2(n)} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\int_1^n \ln^2(t)\,dt \sim n\ln^2(n)}$$

2) a) On pose $f: t \mapsto \ln^2(t)$. On sait que f est positive sur $[1; +\infty[$ car c'est un carré.
De plus f est continue par produit de fonctions continues. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1. +\infty[$ et :

$$\forall t \geq 1, f'(t) = \frac{2\ln(t)}{t} \geq 0$$

On en déduit donc que f est continue, positive et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

b) On sait que f est croissante et positive donc :

$$\forall x \geq 1, \forall k \in [\![x, x+1]\!] \cap \mathbb{N}, \ln^2(x) \leq \ln^2(k) \leq \ln^2(x+1)$$
$$\Longrightarrow \int_k^{k+1} \ln^2(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} \ln^2(k)\,dx \leq \int_k^{k+1} \ln^2(x+1)\,dx$$
$$\Longrightarrow \int_k^{k+1} \ln^2(x)\,dx \leq \ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(x+1)\,dx$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \ln^2(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \leq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \ln^2(x+1)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_1^{n+1} \ln^2(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \leq \int_1^{n+1} \ln^2(x+1)\,dx$$

De plus on sait que :

$$\int_1^{n+1} \ln^2(x)\,dx \sim (n+1)\ln^2(n+1)$$

Or on a :

$$\frac{(n+1)\ln^2(n+1)}{n\ln^2(n)} = \frac{n+1}{n} \times \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^2 = \frac{n+1}{n} \times \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2 \to 1$$

On en déduit donc que :

$$\int_1^{n+1} \ln^2(x)\,dt \sim n\ln^2(n)$$

De plus on a :

$$\int_1^{n+1} \ln^2(x+1)\,dt = \int_2^{n+2} \ln^2(x)\,dx = \int_1^{n+2} \ln^2(x)\,dx - \int_1^{2} \ln^2(x)\,dx = \int_1^{n+2} \ln^2(x)\,dx - 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2$$

On a alors :

$$\frac{\int_1^{n+2} \ln^2(x)\,dx - 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \frac{\int_1^{n+2} \ln^2(x)\,dx}{(n+2)\ln^2(n+2)} - \frac{2\ln^2(2) + 4\ln(2) - 2}{(n+2)\ln^2(n+2)} \to 1$$

On en déduit donc que :

$$\int_2^{n+2} \ln^2(x)\,dx \sim (n+2)\ln^2(n+2) \sim n\ln^2(n)$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \sim n\ln^2(n)$$

3) On sait que :

$$\frac{u_n}{n^2} \sim \frac{\ln^2(n)}{n}$$

Or on sait que :

$$\forall n \geq 2, \frac{\ln^2(n)}{n} > \frac{1}{n}$$

Comme $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge d'après le critère de Riemann, on en déduit donc que $\left(\sum \frac{u_n}{n}\right)$ diverge.

Exercice 2 : Espaces vectoriels de polynômes

Soient n un entier naturel supérieur ou égale à 2 et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose :

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ \forall k \in [\![2; n]\!], P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X-k)^{k-1} \end{cases}$$

On note aussi l'application suivante :

$$f: \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P(X) - P'(X+1) \end{cases}$$

1) Montrer que $(P_0, \dots; P_n)$ est une base de E.

2) Vérifier que :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

3) a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) On pose :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], Q_k = f(P_k)$$

Exprimer chaque Q_k en fonction de P_k.

c) Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E.

d) Montrer que f est un automorphisme de E.

e) Exprimer chaque polynôme P_k $(0 \leq k \leq n)$ en fonction des Q_j $(0 \leq j \leq n)$

f) Déterminer $f^{-1}(Q_k)$ en fonction de $(Q_0, \dots, Q_n)$, où f^{-1} la fonction réciproque de f.

1) On a :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \deg(P_k) = \deg\left(\frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}\right) = \deg(X^k) = k$$

On en déduit donc que la famille $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ forme une famille libre car c'est une famille de polynômes échelonnés.

De plus on a : $\#\mathcal{B} = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. On en déduit donc que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) On sait que :

$$\forall k \in [\![2; n]\!], P_k(X) = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\forall k \geq 2, P_k'(X) &= \frac{1}{k!}(X-k)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}X(X-k)^{k-2}\\ &= \frac{1}{k!}(X-k)^{k-2}(X-k+(k-1)X)\\ &= \frac{1}{k!}(X-k)^{k-2}(kX-k)\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\forall k \geq 2, P_k'(X+1) &= \frac{1}{k!}(X+1-k)^{k-2}(kX)\\ &= \frac{1}{(k-1)!}X\big(X-(k-1)\big)^{k-2}\\ &= P_{k-1}(X)\end{aligned}$$

De la même façon on a :

$$P_1'(X+1) = 1 = P_0(X)$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

3) a) On a :

$$\begin{aligned}\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X) - (\lambda P + Q)'(X+1)\\ &= \lambda P(X) + Q(X) - \lambda P'(X+1) - Q'(X+1)\\ &= \lambda\big(P(X) - P'(X+1)\big) + Q(X) - Q'(X+1)\\ &= \lambda f(P) + f(Q)\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

b) On sait que :

$$Q_0 = f(P_0) = f(1) = 1$$

De plus on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], Q_k = f(P_k) = P_k(X) - P_k'(X+1) = P_k(X) - P_{k-1}(X)$$

c) On sait que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \deg(Q_k) = \deg(P_k) = k$$

Ainsi $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une famille de polynômes échelonnés, donc c'est une famille libre.

De plus on a $\#(Q_0, \dots, Q_n) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. On en déduit donc que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) A présent, on peut dire que f transforme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ en une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc c'est un automorphisme.

Sinon on peut le redémontrer !

On sait que f est un automorphisme, si et seulement si f est injective (et surjective, mais c'est inutile !).

Montrons que f est injective, donc que $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.

On résout :

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$$

On sait que :

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \exists(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X)$$

Comme f est linéaire on a :

$$f(P) = f\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X)\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f\big(P_k(X)\big) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k(X) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$$

Comme $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une famille libre :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \lambda_k = 0$$

On en déduit donc que :

$$ker(f) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$$

Donc f est injective.

Remarque : De même ici on aurait pu finir car on sait qu'un endomorphisme injectif est bijectif.
Néanmoins on peut démontrer que f est surjective en utilisant le fait que :

$$f(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k(X) \Longrightarrow Im(f) = vect\big((Q_0, \dots, Q_n)\big)$$

Comme $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
On en déduit donc que :

$$Im(f) = \mathbb{R}_n[X]$$

Donc f est surjective.
C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

e) On sait que :

$$\begin{cases} f(P_0) = Q_0 = P_0 \\ f(P_1) = Q_1 = P_1 - P_0 \\ f(P_2) = Q_2 = P_2 - P_1 \\ \vdots \\ f(P_n) = Q_n = P_n - P_{n-1} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} P_0 = Q_0 \\ P_1 = Q_1 + Q_0 \\ P_2 = Q_2 + Q_1 + Q_0 \\ \vdots \\ P_n = Q_n + Q_{n-1} + \dots + Q_0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P_k = \sum_{i=0}^{k} Q_i$$

f) On sait que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P_k = \sum_{i=0}^{k} Q_i$$

On en déduit donc que :

$$f^{-1} : \begin{cases} E \to E \\ Q_k \mapsto \sum_{i=0}^{k} Q_i \end{cases}$$

Exercice 3 : Une célèbre intégrale

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale dites de Gauss :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Dans toute la suite du problème, on pose :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt \end{cases}$$

Ainsi rechercher la valeur de I revient à déterminer la limite de F en $+\infty$.
De même on pose la fameuse suite de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$$

On rappelle que :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie A : Existence de *I*

1) Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt$$

3) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, \int_1^x e^{-t} dt \leq e$$

4) En déduire que F admet une limite en $+\infty$.

Partie B : Détermination de *I*

1) Démontrer que :

$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$$

2) a) Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

b) En effectuant un changement de variable, en déduire que :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

3) a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

b) En posant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{B} \cos^{2p}(u)\, du$$

Avec $B \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $et\ p \in \mathbb{N}$ sont à **<u>déterminer</u>**.

e) En déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

4) Déterminer la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Partie A : Existence de *I*

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = e^{-x^2} > 0$$

Ainsi F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) On sait d'après la relation de Chasles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t^2}dt$$

De plus on sait que :

$$\forall t \geq 1, t^2 \geq t \Longrightarrow \forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\forall x \geq 1, \int_1^x e^{-t^2}dt \leq \int_1^x e^{-t}dt$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t}dt$$

3) On a :

$$\int_1^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_1^x = e^{-1} - e^{-x} \leq e^{-1}$$

4) On a :

$$\forall x \geq 1, F(x) \leq F(1) + e$$

Donc F est croissante et majorée, donc F admet une limite finie en $+\infty$.

Partie B : Détermination de I

1) On peut utiliser la concavité de la fonction ln ou bien étudier la fonction $e: u \mapsto \ln(1+u) - u$

2) a) On a :

$$\forall t \in \left[0; \sqrt{n}\right[, \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{nln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)}$$

Or on a :

$$\forall t \in \left[0; \sqrt{n}\right[, -\frac{t^2}{n} \in]-1; 0]$$

De plus on sait d'après la question précédente que :

$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0; \sqrt{n}\right[, ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \Longrightarrow nln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2$$

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\forall t \in \left[0; \sqrt{n}\right[, e^{nln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} \leq e^{-t^2}$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$$

b) On effectue le changement de variable suivant :

$$\boxed{t = \sqrt{n}\sin(u)}$$

On a alors :

_ On change les bornes :

$$t = 0 \Longrightarrow u = 0$$
$$t = \sqrt{n} \Longrightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

_ Calcul du dt

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{n}\cos(u) \Longrightarrow dt = \sqrt{n}\cos(u)\,du$$

_ On change l'intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^n \sqrt{n}\cos(u)\,du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u)\,du$$

3) a) On a :

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = e^{-nln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)}$$

Or on sait que :

$$\forall t \in [0; \sqrt{n}[, ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n} \Longrightarrow -nln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2 \Longrightarrow e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

b) On effectue le changement de variable suivant :

$$\boxed{t = \sqrt{n}\tan(u)}$$

On a alors :

_ On change les bornes :

$$t = 0 \Longrightarrow u = 0$$
$$t = \sqrt{n} \Longrightarrow u = \frac{\pi}{4}$$

_ Calcul du dt

$$\frac{dt}{du} = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)} \Longrightarrow dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)}du$$

_ On change l'intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2(u))^{-n}\sqrt{n}}{\cos^2(u)}du$$

De plus on sait que :

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,du$$

Ainsi on a $B = \frac{\pi}{4}$ et $p = n - 1$

c) On a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,du$$

De plus on sait que

$$\forall u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(u) \geq 0$$

On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,du \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,du$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

4) On sait que :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

On en déduit donc que :

$$W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

$$\lim_n \sqrt{n} W_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\boldsymbol{I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$