DS n°7 PCSI
Vendredi 3 mai 2024

Exercice 1 : Nature d'une série entière

On pose :

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$$

On cherche à déterminer la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{n^2}$.

1) A l'aide d'une Intégration Par Partie, démontrez que :

$$\int_1^n \ln^2(t)\,dt \sim n\ln^2(n)$$

2) a) Démontrer que $t \mapsto \ln^2(t)$ est continue, positive et croissante sur $[1;+\infty[$.
b) En déduire à l'aide d'une comparaison série-intégrale que :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \sim n\ln^2(n)$$

3) En déduire la nature de la série $\left(\sum \frac{u_n}{n^2}\right)$.

Exercice 2 : Espaces vectoriels de polynômes

Soient n un entier naturel supérieur ou égale à 2 et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose :

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ \forall k \in [\![2;n]\!], P_k(X) = \dfrac{1}{k!}X(X-k)^{k-1} \end{cases}$$

On note aussi l'application suivante :

$$f: \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P(X) - P'(X+1) \end{cases}$$

1) Montrer que $(P_0, \dots; P_n)$ est une base de E.
2) Vérifier que :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

3) a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) On pose :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], Q_k = f(P_k)$$

Exprimer chaque Q_k en fonction de P_k.
c) Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E.
d) Montrer que f est un automorphisme de E.
e) Exprimer chaque polynôme P_k $(0 \leq k \leq n)$ en fonction des Q_j $(0 \leq j \leq n)$
f) Déterminer $f^{-1}(Q_k)$ en fonction de $(Q_0, \dots, Q_n)$, où f^{-1} la fonction réciproque de f., la fonction réciproque de f.

Problème : Une célèbre intégrale

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale dites de Gauss :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Dans toute la suite du problème, on pose :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \end{cases}$$

Ainsi rechercher la valeur de I revient à déterminer la limite de F en $+\infty$.
De même on pose la fameuse suite de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$$

On rappelle que :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie A : Existence de *I*

1) Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt$$

3) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, \int_1^x e^{-t} dt \leq e^{-1}$$

4) En déduire que F admet une limite en $+\infty$.

Partie B : Détermination de *I*

1) Démontrer que :

$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$$

2) a) Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

b) En effectuant un changement de variable, en déduire que :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

3) a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

b) En posant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(u)\, du$$

Avec $B \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $et\ p \in \mathbb{N}$ sont à **déterminer**.

c) En déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

4) Déterminer la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$