Correction DM n°7

Exercice 1 : Suites imbriquées et application linéaire

Soient $((u_n),(v_n),(w_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 3w_n \end{cases}$$

1) Ecrire un programme Python $simul(n,a,b,c)$ qui renvoie sous forme de trois listes les valeurs prises par les trois suites de 0 à n, avec $u_0 = a, v_0 = b \; et \; w_0 = c$.

$$u = [a, u_1, \dots, u_n], v = [b, v_1, \dots, v_n], w = [c, w_1, \dots, w_n]$$

2) Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}) = f\big((u_n, v_n, w_n)\big)$$

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n, w_n) = f^n\big((u_0, v_0, w_0)\big)$$

Il nous reste à déterminer f^n.
Dans toute la suite on pose :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$$

De même on définie $Sp(f)$, noté le spectre de f, par :

$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \; tel \; que \dim(E_\lambda) \geq 1\}$$

4) a) Déterminer $Sp(f)$ puis déterminer une base pour chaque $E_\lambda, \lambda \in Sp(f)$.
b) Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$$

c) Décomposer le vecteur $e = (x,y,z)$ dans une base adaptée à $\bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$.

d) En déduire une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de $u_0, v_0 \; et \; w_0$.

1) On a :

```
def f(x,y,z):
    return (3*x-z,2*x+4*y+2*z,-x+3*z)

def simul(n,a,b,c):
    u=[a]
    v=[b]
    w=[c]
    for i in range(n):
        (a,b,c)=f(a,b,c)
        u.append(a)
        v.append(b)
        w.append(c)
    return u,v,w
```

Méthode des rectangles et loi normale.py × module1 ×

Console Python

```
>>> simul(5,2,3,1)
([2, 5, 14, 44, 152, 560],
 [3, 18, 84, 360, 1488, 6048],
 [1, 1, -2, -20, -104, -464])
```

2) On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z) \end{cases}$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (e_1, e_2) \in (\mathbb{R}^3)^6, f(\lambda e_1 + e_2) = f\big(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big)$$
$$= f\big((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)\big)$$
$$= \big(3(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda z_1 + z_2), 2(\lambda x_1 + x_2) + 4(\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2), -(\lambda x_1 + x_2) + 3(\lambda z_1 + z_2)\big)$$
$$= \lambda f(x_1, y_1, z_1) + f\big((x_2, y_2, z_2)\big)$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
3) C'est une récurrence immédiate !

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = \ (u_n, v_n, w_n) = f^n\big((u_0, v_0, w_0)\big)$$

Initialisation : $n = 0$
On a :

$$f^0\big((u_0, v_0, w_0)\big) = Id_{\mathbb{R}^3}\big((u_0, v_0, w_0)\big) = \ (u_0, v_0, w_0)$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vrai $\mathcal{P}(n)$. On a :

$$(u_n, v_n, w_n) = f^n\big((u_0, v_0, w_0)\big)$$

On sait que :

$$\begin{aligned}(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}) &= (3u_n - w_n, 2u_n + 4v_n + 2w_n, -u_n + 3w_n) = f\big((u_n, v_n, w_n)\big) \\ &= f\left(f^n\big((u_0, v_0, w_0)\big)\right) = f^{n+1}\big((u_0, v_0, w_0)\big)\end{aligned}$$

Donc la proposition est héréditaire.
Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.
4) Cherchons les valeurs de λ pour lesquels $\ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$ est non réduit à 0.
On pose $\lambda \in \mathbb{R}$ puis on résout :

$$f\big((x, y, z)\big) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x - z = 0 \\ 2x + (4-\lambda)y + 2z = 0 \\ -x + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Ce système, dépendant de λ admet toujours des solutions car $(0,0,0)$ est solution (c'est un système homogène). Pour qu'il admette plus d'une solution, il faut que la matrice des coefficients soit de rang inférieur ou égal à 2. Cherchons donc le rang de A_λ :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda - 3 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 0 & -1+(\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$A_\lambda \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

On a donc $rg(A_\lambda) = 3 \Leftrightarrow \lambda \notin \{4; 2\}$
De plus on a :

$$rg(A_2) = 1, rg(A_4) = 2$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{Sp(f) = \{2; 4\}}$$

On cherche à présent E_2 et E_4.
On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

On a donc :

$$E_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ tel\ que\ x = z = -\frac{1}{2}y\right\} = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

De même on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -z$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{E_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ tel\ que\ x = -z\right\} = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

b) Il suffit de montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = E_2 \oplus E_4 = vect\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right) \oplus vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Pour faire cela il suffit de montrer que :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Ainsi $\mathcal{B}$`est libre et $Card(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc que :

$$\boldsymbol{\mathbb{R}^3 = vect\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right) \oplus vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = E_2 \oplus E_4}$$

c) On cherche :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = e_{E_2} + e_{E_4}$$

On sait que la décomposition existe et est unique. On résout :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-2a\\a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\c\\-b\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ -2a + c = y \\ a - b = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(x+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-z) \\ c = x + y + z \end{cases}$$

On a alors :

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x+z)\\-(x+z)\\\frac{1}{2}(x+z)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x-z)\\x+y+z\\-\frac{1}{2}(x-z)\end{pmatrix}}$$

d) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} = f^n\left(\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}\right) = f^n\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(u_0+w_0)\\-(u_0+w_0)\\\frac{1}{2}(u_0+w_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(u_0-w_0)\\u_0+v_0+w_0\\-\frac{1}{2}(u_0-w_0)\end{pmatrix}\right)$$

$$= f^n\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(u_0+w_0)\\-(u_0+w_0)\\\frac{1}{2}(u_0+w_0)\end{pmatrix}\right) + f^n\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(u_0-w_0)\\u_0+v_0+w_0\\-\frac{1}{2}(u_0-w_0)\end{pmatrix}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall e \in E_2, f(e) = 2e \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f^n(e) = 2^n e \; par\ récurrence\ immédiate$$

De même on a :

$$\forall e \in E_4, f(e) = 4e \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f^n(e) = 4^n e$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0 + w_0) \\ -(u_0 + w_0) \\ \frac{1}{2}(u_0 + w_0) \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0 - w_0) \\ u_0 + v_0 + w_0 \\ -\frac{1}{2}(u_0 - w_0) \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \boldsymbol{u_n = 2^{n-1}(1 + 2^n)u_0 + 2^{n-1}(1 - 2^n)w_0} \\ \boldsymbol{v_n = 2^n(2^n - 1)u_0 + 4^n v_0 + 2^n(2^n - 1)w_0} \\ \boldsymbol{w_n = 2^{n-1}(1 - 2^n)u_0 + 2^{n-1}(1 + 2^n)w_0} \end{cases}$$

Problème 1: Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie A : Convergence de deux suites

On considère les deux suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \quad et \ v_n = \ln(u_n)$$

1) Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
2) En déduire que (v_n) converge.
3) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie II : Calcul de la constante k

Dans cette partie on souhaite prouver que $k = \sqrt{2\pi}$.

On pose la suite $(\mathrm{W_n})$ définie par :

$$\forall \ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) \, \mathrm{dt}$$

1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall \ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{n+2}} = \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}+2}\mathrm{W_n}$$

b) En déduire que :

$$\forall \ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{2n}} = \frac{(2\mathrm{n})!}{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2} \times \frac{\pi}{2} \ et \ \mathrm{W_{2n+1}} = \frac{(2^{\mathrm{n}}\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!} = \frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!}$$

2) Démontrer que la suite nW_nW_{n+1} est constante.
3) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)^2 \sim \pi$$

4) Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.

Partie A :

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Or on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n} = e \times \frac{n+1}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \times n^{n+\frac{1}{2}} = e \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

De plus on sait que :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)^2} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{n}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2}}$$

2) On sait que :

$$v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

De plus on sait que :

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ *converge car* $2 > 1$ *et on applique le critère de Riemann.*

D'après le théorème de convergence des séries à termes positifs, on en déduit donc que $\left(\sum (v_n - v_{n+1})\right)$ converge.

On a donc :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = S \in \mathbb{R}^-$$

Or on sait que :

$$\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n v_{n+1} = S + v_1$$

Ainsi la suite (v_n) converge.

3) On sait que (v_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\lim_n \ln(u_n) = \ell$$

Comme ln est continue sur son ensemble de définition, on a :

$$\lim_n u_n = e^{\ell} = k > 0$$

On en déduit donc que :

$$\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \sim k$$

Par produit on a :

$$\boldsymbol{n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Partie B :

1) a) On a :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{\mathrm{n}+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mathrm{n}+2}(\mathrm{t})\, \mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{\mathrm{n}+1}(\mathrm{t})}_{\mathrm{u(t)}}\, \underbrace{\cos(\mathrm{t})}_{\mathrm{v'(t)}}\, \mathrm{dt}$$

On pose :

$$\begin{cases} \mathrm{u(t)} = \cos^{\mathrm{n}+1}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{v'(t)} = \cos(\mathrm{t}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{u'(t)} = (\mathrm{n}+1)(-\sin(\mathrm{t}))\cos^{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{v(t)} = \sin(\mathrm{t}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \underbrace{\left[\cos^{n+1}(t) \times \sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(t))\cos^n(t)\sin(t)\, dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n(t)\, dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)\, dt$$

$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \Longrightarrow \boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

b) On veut démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Méthode 1 : Par récurrence :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \text{"}W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}\text{"}$$

Initialisation :

$$\frac{(0)!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Sit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n.

On a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Or on sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2(n+1)}{2^2(n+1)(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 vraie et P_n héréditaire implique par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} W_{2n-6} \\
&\vdots \text{ On réitère le procédé n fois} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} W_0
\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

De plus on a :

$$\frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \dots \times 2}$$
$$= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n \times (n-1) \times \dots \times 1}$$
$$= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n!}$$
$$= \frac{2n(2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{2^n n! \times 2n \times (2n-2) \dots \times 2}$$
$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

On a donc :

$$\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{W_{2n}} = \frac{(\mathbf{2n})!}{\mathbf{2^{2n}(n!)^2}} \times \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

C'est la même chose que la question a précédente, soit par récurrence ou par itération de la formule de récurrence.
Comme on ne nous donne pas de formule à démontrer, nous allons le faire grâce à la méthode 2.

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$$
$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3}$$
$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} W_{2n-5}$$
$$\vdots \text{ On réitère le procédé n fois}$$
$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} W_1$$

Or on sait que :

$$W_1 = 1$$

De plus on a :

$$\frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} = \frac{2^n n!}{(2n+1) \times (2n-1) \dots \times 3}$$
$$= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$
$$\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{W_{2n+1}} = \frac{(\mathbf{2^n n!})^2}{(\mathbf{2n+1})!} = \frac{\mathbf{2^{2n}(n!)^2}}{(\mathbf{2n+1})!}$$

2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \Longrightarrow u_{n+1} = (n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (\mathbf{n+1}) \mathbf{W_{n+1} W_n} = \mathbf{u_n}$$

Ainsi la suite **(u_n) est constante**.

3) On sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \le \cos(t) \le 1$$
$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \le \cos^{n+1}(t) \le \cos^n(t)$$
$$\Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \, dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \, dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt$$

$$\Longrightarrow \forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathrm{W_{n+1}} \leq \mathrm{W_n}$$

On a donc :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{n+1}} \leq \mathrm{W_n} \leq \mathrm{W_{n-1}}$$
$$\Longrightarrow 1 \leq \frac{\mathrm{W_n}}{\mathrm{W_{n+1}}} \leq \frac{\mathrm{W_{n-1}}}{\mathrm{W_{n+1}}}$$

Or on sait que :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{n+2}} = \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}+2}\mathrm{W_n}$$

On a donc :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{n+1}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\mathrm{W_{n-1}} \Longrightarrow \forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \frac{\mathrm{W_{n-1}}}{\mathrm{W_{n+1}}} = \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}$$

On a donc :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{\mathrm{W_n}}{\mathrm{W_{n+1}}} \leq \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$W_n \sim W_{n+1}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathrm{n}+1)\mathrm{W_{n+1}}\mathrm{W_n} = \mathrm{u_0} = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$(n+1)(W_n)^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$(2n+2)(W_{2n+1})^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

Ainsi on a :

$$(2n+1)\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!}\right)^2 \sim \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{2}{2n+1}\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)^2 \sim \pi \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \sim \pi}$$

4) On sait que :

$$\pi = \lim_n \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)^2$$

Par continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ on a :

$$\sqrt{\pi} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)$$

De plus on sait que :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \times \frac{\mathbf{2^{2n}}\left(k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{\mathbf{2}}}{k\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\pi}$$
$$\boldsymbol{\Longrightarrow k = \sqrt{2\pi}}$$

On a ainsi la formule de Stirling :

$$\boldsymbol{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Problème facultatif

Après avoir démontré l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans le cours, de e et de $\ln(2)$ dans les précédents devoirs, je vous propose ici de démontrer l'irrationnalité de π. Pour ce faire nous allons utiliser un vieux résultat :

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie B : Irrationalité de π

Dans un premier temps nous allons montrer que π^2 est irrationnel.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}, P_n(X) = \frac{X^n(1-X)^n}{n!}$$

1) a) Déterminer les valeurs de $(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a_{n+k} X^{n+k}$$

b) Démontrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 \; si \; i \leq n-1 \\ 0 \; si \; i > 2n \\ a_i \times (i) \times \dots \times (i-n+1) \; si \; i \in [\![n; 2n]\!] \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$$

d) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(1) \in \mathbb{Z}$$

(*Indice* : On pourra remarquer que $\boldsymbol{Pn(X) = P_n(1-X)}$)

Dans les questions suivantes on veut montrer que π^2 est un irrationnel et l'on va raisonner par l'absurde.

On suppose que :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, b \neq 0, tel\ que\ \pi^2 = \frac{a}{b}$$

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n(X) = b^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(X) \right)$$

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$$

De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \pi \int_0^1 a^n P_n(x) \sin(\pi x)\, dx$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, , \forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \pi^2 a^n P_n(x) \sin(\pi x)$$

Puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathbb{Z}$$

3) On pose la suite :

$$u_n = \frac{a^n}{n!} \; (\text{où } a = \pi \times b\ définie\ précédemment)$$

a) Montrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel\ que\ \forall n \geq n_0, \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{2}$$

b) Montrer que !

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

c) Démontrer que :

$$\forall n \geq n_0, A_n \in]0;1[$$

d) En déduire que π^2 est irrationnel, de même que π.

Partie A :

1) a) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-X)^k \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n+k}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \forall\, \boldsymbol{k} \in [\![\boldsymbol{n}; \boldsymbol{2n}]\!], \boldsymbol{a_{n+k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{Z}}$$

b) On sait que :

$$\mathrm{P_n} \in \mathbb{R}_{2n}[X]$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \geq 2n+1, (P_n)^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

De plus on sait que :

$$X^n | P_n$$

Donc 0 est racine de P_n d'ordre de multiplicité au moins n. Donc :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], (P_n)^{(k)}(0) = 0$$

Enfin on a :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a_{n+k} X^{n+k} = \frac{1}{n!} \times (a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + \cdots + a_{2n} X^{2n})$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} a_k X^k$$

$$\Longrightarrow \forall \ell \in [\![n; 2n]\!], P_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\ell-1} a_k X^k + \frac{1}{n!} \sum_{k=\ell}^{2n} a_k X^k$$

Or on sait que :

$$\forall k \in [\![n; \ell - n]\!], \frac{d^\ell}{dX^\ell}(X^k) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

On en déduit donc que :

$$\forall \ell \in [\![n; 2n]\!], (P_n)^{(\ell)}(X) = \frac{1}{n!} \sum_{k=\ell}^{2n} a_k \frac{d^\ell}{dX^\ell}(X^k) = \frac{1}{n!} \sum_{k=\ell}^{2n} a_k \times k \times (k-1) \times \dots . \times (k - \ell + 1) X^{k-\ell}$$

$$= a_\ell \times \ell \times \dots . \times \frac{1}{n!} + \sum_{k=\ell+1}^{2n} a_k \times k \times (k-1) \times \dots . \times (k - \ell + 1) X^{k-\ell}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{\ell} \in [\![\boldsymbol{n}; \boldsymbol{2n}]\!], (\boldsymbol{P_n})^{(\boldsymbol{\ell})}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a_\ell} \times \boldsymbol{\ell} \times \dots . \times \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n!}} = \boldsymbol{a_\ell} \times \boldsymbol{\ell} \times \dots \times (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{1})}$$

c) On sait que :

$$\forall \boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{n}; \boldsymbol{2n}]\!], \boldsymbol{a_i} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \forall \boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{n}; \boldsymbol{2n}]\!], \boldsymbol{a_\ell} \times \boldsymbol{\ell} \times \dots \times (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{1}) \in \mathbb{Z}$$

d) On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, P_n(X) = \frac{X^n(1-X)^n}{n!} \Longrightarrow P_n(1-X) = \frac{(1-X)^n (X)^n}{n!} = P_n(X)$$

On en déduit donc que :

$$\forall \ell \in [\![n; 2n]\!], (P_n)^{(\ell)}(X) = (-1)^\ell (P_n)^{(\ell)}(1-X)$$

$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{\ell} \in [\![\boldsymbol{n}; \boldsymbol{2n}]\!], (\boldsymbol{P_n})^{(\boldsymbol{\ell})}(\boldsymbol{1}) = (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{\ell}} (\boldsymbol{P_n})^{(\boldsymbol{\ell})}(\boldsymbol{0}) \in \mathbb{Z}$$

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n(0) = b^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(0) \right) = b^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\pi^2)^{n-k} P_n^{(2k)}(0) \right)$$

$$= b^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} P_n^{(2k)}(0) \right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^{n-k} \times b^k \times P_n^{(2k)}(0)$$

Or on sait que :

$$(a, b) \in \mathbb{Z}^2$$

De même on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in [\![0; n]\!], (-1)^k P_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in [\![0;n]\!], (-1)^k a^{n-k} \times b^k \times P_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{F_n(0)} \in \mathbb{Z}$$

De même comme $P_n^{(2k)}(1) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{F_n(1)} \in \mathbb{Z}$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) = F_n''(x)\sin(\pi x) + \pi F_n'(x)\cos(\pi x) - \pi F'_n(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x)$$
$$= \left(F_n''(x) + \pi^2 F_n(x)\right)\sin(\pi x)$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(x)\right)$$
$$\Longrightarrow F''_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k+2)}(x)\right)$$

De plus on sait que $\deg(P_n) = 2n \Longrightarrow P^{(2n+2)}(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F''_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k+2)}(x)\right)$$
$$= b^n\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \pi^{2n-2k+2} P_n^{(2k)}(x)\right)$$

De plus on a :

$$\pi^2 F_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \pi^{2n-2k+2} P_n^{(2k)}(x)\right)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) = \left(F_n''(x) + \pi^2 F_n(x)\right)\sin(\pi x)$$
$$= b^n\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\pi^{2n-2k+2}P_n^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \pi^{2n-2k+2}P_n^{(2k)}(x)\right)\sin(\pi x)$$
$$= b^n \pi^{2n+2} P_n(x)\sin(\pi x) = \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)$$

De plus on a :

$$A_n = \pi\int_0^1 a^n P_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 g_n'(x)dx$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{A_n = \frac{1}{\pi}\left(g_n(1) - g_n(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi F_n(1) + \pi F_n(0)\right) = F_n(1) - F_n(0) \in \mathbb{Z}}$$

D'après la question 2) a).

3) a) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

On en déduit donc d'après le critère de d'Alembert que $u_n \to 0$. On a donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon)\ tel\ que\ \forall n \geq n_0(\epsilon), u_n \leq \frac{1}{2}$$

On pose $n_O = n_0(0{,}5)$ et on obtient :

$$\boldsymbol{\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel\ que\ \forall n \geq n_0, \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{2}}$$

b) On a par une étude de fonction que :

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) \in \left[0; \frac{1}{4^n \times n!}\right] \subset \left[0; \frac{1}{n!}\right]}$$

c) On sait que :

$$A_n = \pi \int_0^1 a^n P_n(x) \sin(\pi x)\, dx$$

De plus on a :

$$0 < P_n(x) < \frac{1}{n!}\ et\ \sin(\pi x) \geq 0\ \forall x \in [0;1]$$
$$\Rightarrow 0 < a^n P_n(x) \sin(\pi x) < \frac{a^n}{n!} \sin(\pi x)$$
$$\Rightarrow 0 < \pi \int_0^1 a^n P_n(x) \sin(\pi x)\, dx < 2 \times \frac{a^n}{n!}$$

Or on sait que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{a_n}{n!} \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n \geq n_0, 0 < A_n < 1}$$

d) On a démontré que :

$$\forall n \geq n_0, \begin{cases} A_n \in]0;1[\\ A_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cela est impossible donc π^2 est irrationnel.
De même par contraposée on sait que π rationnel implique π^2 rationnel (il suffit d'écrire π^2 comme le quotient des carrées de la fraction rationnelle de π). Donc **$\boldsymbol{\pi}$ est irrationnel.**