TD 26 : Probabilités

Partie A : Probabilités « classiques »

Exercices A.1 : Dix paires de chaussures distinctes sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard quatre chaussures. Quelle est la probabilité :
1) D'obtenir deux paires de chaussures ?
2) D'obtenir au moins une paire de chaussure ?
3) D'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

On pose :
A = « Obtenir au moins une paire ».
B = « Obtenir deux paires ».
1) Le tirage est équiprobable donc on peut utiliser la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Nombre de cas favorables pour B}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

On revient alors à faire du dénombrement.
On sait que l'on tire 4 chaussures parmi 20. On a donc :

$$\text{Nombre de cas possibles} = \binom{20}{4} = 4845$$

De plus on veut tirer 2 paires. On sait que l'on a :

$$\text{Nombre de cas favorables pour B} = \binom{10}{2} = 45$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{90}{4845} \approx 0{,}009$$

2) On utilise aussi la même formule.
On a :

$$\text{Nombre de cas favorables pour A} = 10 \times \binom{18}{2} - \binom{9}{2} = 1485$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{10 \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{1485}{4845} \approx 0{,}3065$$

3) On peut le faire de deux façons différentes.
<u>Méthode 1 : On utilise la formule précédente :</u>

$$\text{Nombre de cas favorables pour A}\backslash\text{B} = 10 \times \left(\binom{18}{2} - 9\right) = 1440$$

On a alors :

$$\mathbb{P}(A\backslash B) = \frac{1440}{4845} \approx 0{,}297$$

<u>Méthode 2 : Formule :</u>

$$\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

On a alors :

$$\mathbb{P}(A\backslash B) = \frac{1485}{4845} - \frac{45}{4845} = \frac{1440}{4845} \approx 0{,}297$$

Remarque : On peut écrire un programme Python pour simuler cette probabilité.

```python
def tiragechaussures(a,b): #a représente le nombre de paires de chaussures et b le nombre de chaussure que l'on tire.
    import random as r
    chaussures=[i for i in range(1,2*a+1)] #On modélise les paires de chaussures comme étant (1,2), (3,4),...,(19,20)
    hasard=r.sample(chaussures,b) #On prend au hasard 4 chaussures.
    a=sorted(hasard) #On trie la liste a dans l'ordre croissant.
    compteur=0
    for i in range(0,3):
        if a[i]%2==1: #On teste si on est impair car une paire de chaussure commence toujours par un chiffre impair.
            if a[i+1]==a[i]+1: #Si celui d'après notre nombre impair est consécutif alors on ajoute 1 au compteur
                compteur=compteur+1
    return (compteur)
```

Puis on fait des tirages en très grands nombres (1000 ou 10000) pour approcher les probabilités trouvées :

Pour la question 1 :

```python
def tirage(n):
    a=0
    for i in range(n):
        b=tiragechaussures(10,4)
        if b==2:
            a=a+1
    return (a/n)
```

```
>>> tirage(10000)
0.0107
```

Pour la question 2 :

```python
def tirage(n):
    a=0
    for i in range(n):
        b=tiragechaussures(10,4)
        if b>=1:
            a=a+1
    return (a/n)
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> tirage(10000)
0.3103
```

Pour la question 3 :

```python
def tirage(n):
    a=0
    for i in range(n):
        b=tiragechaussures(10,4)
        if b==1:
            a=a+1
    return (a/n)
```

```
>>> tirage(10000)
0.298
>>>
```

Exercices A.2 : Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :
1) On tire deux boules simultanément.
2) On tire une boule, on ne la remet pas, puis on en tire une autre.
3) On tire une boule, on la remet, puis on en tire une autre.

Là encore le tirage est équiprobable, on a donc affaire a du dénombrement :
On pose :
A = « Obtenir des numéros de la même parité ».
1) On regarde les numéros obtenus, sans tenir compte de l'ordre.

$$\text{Nombre de cas possibles} = \binom{9}{2} = 36$$

$$\text{Nombre de cas favorables pour A} = 6 + 10 = 16$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

2) C'est la même chose que l'on tire une boule puis l'autre ou que l'on tire simultanément !

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

3) Ici on regarde les couples (T_1, T_2).

$$\text{Nombre de cas possibles} = 9 \times 9 = 81$$
$$\text{Nombre de cas favorables pour A} = \underbrace{16}_{\text{pair}} + \underbrace{25}_{\text{impair}} = 41$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{41}{81}$$

Remarque : On peut là aussi faire un programme Python pour illustrer nos probabilités :

Pour la question 1 et 2 :

```
    import random as r
    a=[i for i in range(1,10)]  #On crée une liste de 1 jusqu'à 9
    b=r.sample(a,2) #On prend deux nombres au hasard dans a
    if (b[0]%2-b[1]%2)==0: #On teste s'ils ont même parité
        return (1)
    else:
        return (0)

def tirage(n):
    a=0
    for i in range(n):
        a=a+exerciceA2()
    return (a/n)
```

```
>>> tirage(10000)
0.4546
```

Pour la question 3 :

```
def exerciceA2():
    import random as r
    a=[i for i in range(1,10)]  #On crée une liste de 1 jusqu'à 9
    b=r.choice(a) #On prend un nombre au hasard dans a
    c=r.choice(a)   #On prend un deuxième nombre au hasard dans a
    if (b%2-c%2)==0: #On teste s'ils ont même parité
        return (1)
    else:
        return (0)

def tirage(n):
    a=0
    for i in range(n):
        a=a+exerciceA2()
    return (a/n)
```

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 3
 win32. ***
>>> tirage(10000)
0.5065
```

Exercice A.3 : 1) Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré. Déterminer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2) On considère un lycée de n élèves, $n \leq 365$. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient la même date d'anniversaire. (Aucun élève n'est né le 29 février !).

1) On pose :
A = « aucun jeton n'a été tiré plus d'une fois »
1$^{\text{er}}$ cas : Si $M > n$ alors $A = \emptyset$ et $\mathbb{P}(A) = 0$
2$^{\text{ième}}$ cas : $M \leq n$.
C'est encore un problème de dénombrement. On a :

$$\text{Nombre de cas possible} = M^n$$
$$\text{Nombre de cas favorables} = M(M-1)\dots(M-n+1)$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{M \times (M-1) \times \ldots \times (M-n+1)}{\mathrm{M}^{\mathrm{n}}}$$

2) On va déterminer l'évènement contraire. Dans une classe de n élèves, il y a :

$$\text{Nombre de cas possibles} = \frac{365^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

Pour les dates de naissance. Si tous les élèves sont nés à des jours différents de l'année, il y a alors :

$$\text{Nombre de cas favorables} = \binom{365}{\mathrm{n}}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{\binom{365}{\mathrm{n}}}{\frac{365^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}} = \frac{365!}{365^{\mathrm{n}}(365-\mathrm{n})!}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \frac{365!}{365^{\mathrm{n}}(365-\mathrm{n})!}$$

Voici un petit tableau pour différentes valeurs de n :

5	2,71 %
10	11,69 %
15	25,29 %
20	41,14 %
23	50,73 %
25	56,87 %
30	70,63 %
40	89,12 %
50	97,04 %
60	99,41 %
80	99,99 %
100	99,99997 %

Partie B : Probabilités conditionnelles

Exercice B.1 : Une urne contient 15 boules : Une noire, 5 blanches et 9 rouges.
1) On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :
a) A = « Le tirage est tricolore ».
b) B = Parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge »
c) C = « Les trois boules tirées sont de la même couleur ».
2) On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer alors les probabilités des évènements A, B et C définis ci-dessus.

Là encore c'est du dénombrement.
1) a) On sait que :

$$\textbf{Nombre de cas possibles} = \binom{15}{3} = 455$$

On a de plus :

$$\text{Nombre de cas favorables pour A} = \binom{9}{1} \times \binom{5}{1}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{45}{455} \approx 0{,}099$$

b) On a :

$$\text{Nombre de cas favorables pour B} = \underbrace{\binom{9}{1} \times \binom{5}{1}}_{\text{tirage tricolore}} + \underbrace{\binom{9}{2}}_{\text{2 boules rouges}} = 45 + 36 = 81$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{81}{455} \approx 0{,}178$$

c) On a :

$$\text{Nombre de cas favorables pour B} = \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{3 blanches}} + \underbrace{\binom{9}{3}}_{\text{3 rouges}} = 10 + 84 = 94$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{94}{455} \approx 0{,}207$$

2) Là ici il y a :

$$\#\Omega = 15^3 = 3375$$

a) On a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{15} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} \times 3! = \frac{270}{3375} = 0{,}08$$

b) On a :

$$\mathbb{P}(B) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{15} \times \left(\frac{9}{15}\right)^2 + \frac{270}{3375} = \frac{513}{3375} \approx 0{,}152$$

c) De même on a :

$$\mathbb{P}(C) = \left(\frac{1}{15}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^3 + \left(\frac{9}{15}\right)^3 = \frac{855}{3375} \approx 0{,}253$$

Exercice B.2 : Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux dés avec deux dés non truqués. J_1 gagne si la somme des dés donne 6 et J_2 gagne si la somme des dés vaut 7.
1) Quelle est la probabilité pour que J_1 gagne au $n-$ième coup ?
2) Calculer la probabilité p_n pour que J_1 gagne en moins de n coups.
3) Calculer la probabilité q_n pour que J_2 gagne en moins de n coups.
4) Déterminer $\lim p_n$ et $\lim q_n$. Interpréter.

On effectue le tableau suivant :

Dé vert+Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	2	3			6	7
2				6	7	
3			6	7		
4		6	7			
5	6	7				
6	7					12

On pose :
A = « La somme des dés vaut 6 ».
B = « La somme des dés vaut 7 ».
On a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

On a alors :

$$\mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = \frac{25}{36}$$

On pose :
C_i = « Le joueur J_1 gagne au i-ième coup ».
On a alors :

$$\mathbb{P}(C_n) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36}$$

2) On utilise ici les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}) = \mathbb{P}(C_1) + \dots + \mathbb{P}(C_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(C_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} \right) = \frac{5}{36} \times \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} = \frac{5}{36} \times \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{5}{36} \times \frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}}{1-\frac{25}{36}}$$

$$= \mathbf{\frac{5}{11} \times \left(1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\right)}$$

c) On a de même :
D_i = « Le joueur J_2 gagne au i-ième coup ».
On a alors :

$$\mathbb{P}(C_n) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

On utilise ici les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D_1 \cup \ldots \cup D_{n-1}) = \mathbb{P}(D_1) + \cdots + \mathbb{P}(D_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(D_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} = \frac{6}{36} \times \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{6}{36} \times \frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}}{1-\frac{25}{36}}$$

$$= \mathbf{\frac{6}{11} \times \left(1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\right)}$$

d) On a :

$$\lim_{n} p_n = \frac{5}{11}$$
$$\lim_{n} q_n = \frac{6}{11}$$

On en déduit que le joueur J_2 a une probabilité plus grande de gagner que le joueur J_1, si la partie dure « longtemps ».
On peut illustrer cela par un programme Python :

```python
def exerciceB2(n):
    import random as r
    J1=0    #Compte le nombre de parties gagné par J1
    J2=0    #Compte le nombre de parties gagné par J1
    for i in range(n):  #On réalise n parties
        a=r.randint(1,6)
        b=r.randint(1,6)
        while (7-a-b)*(6-a-b)!=0:   #Dans une partie on attend que l'un des joueurs gagnent
            a=r.randint(1,6)
            b=r.randint(1,6)
        if a+b==6:
            J1=J1+1
        else:
            J2=J2+1
    return (J1/n,J2/n)
```

Console Python

```
>>> exerciceB2(10000)
(0.4566, 0.5434)
>>>
```

Exercice B.3 : Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- S'il fonctionne à la date n-1 ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n.
- S'il passe à la date n-1 ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n.

Où (a, b) est un couple de réels de $[0,1]$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'évènement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.
1) Déterminer p_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer la limite de la suite (p_n).

1) C'est encore des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(M_n) = \mathbb{P}(M_{n-1}) \times \mathbb{P}_{M_{n-1}}(M_n) + \mathbb{P}(\overline{M_{n-1}}) \times \mathbb{P}_{\overline{M_{n-1}}}(M_n)$$
$$= ap_{n-1} + q_{n-1}(1-b)$$
$$= ap_{n-1} + (1-p_{n-1})(1-b)$$
$$= (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b$$

On a donc :

$$p_n = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b$$

C'est une suite arithmético-géométrique.

1er cas : Si $a+b=2$ ($a=1$ et $b=1$)

On a alors :

$$p_n = 1 - b = 1$$

2ième cas : Si $a+b \neq 2$

On cherche le point fixe :

$$\alpha = (a+b-1)\alpha + 1 - b$$
$$\Longrightarrow \alpha = \frac{1-b}{2-(a+b)}$$

On a alors la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = p_n - \left(\frac{1-b}{2-(a+b)}\right)$$

Alors (v_n) est géométrique de raison $a+b-1$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (a+b-1)^n \left(p_0 - \left(\frac{1-b}{2-(a+b)}\right)\right)$$
$$\Longrightarrow p_n = (a+b-1)^n \left(p_0 - \left(\frac{1-b}{2-(a+b)}\right)\right) + \left(\frac{1-b}{2-(a+b)}\right)$$

2) On a donc :

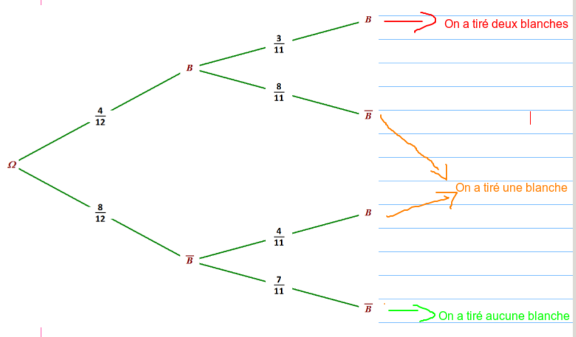
$$\lim_n p_n = 1 \text{ si } a = b = 1$$
$$\lim_n p_n = \left(\frac{1-b}{2-(a+b)}\right) \text{ si } a < 1$$

Exercice B.4 : Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.

1) Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.

2) Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

On peut représenter la situation sous la forme d'un arbre de probabilité :



1) On pose A_i = « On a placé i boules blanches de l'urne B dans l'urne A ».

On a alors :

$$\mathbb{P}(A_0) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$
$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} + \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{16}{33}$$
$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

On peut ensuite refaire un arbre de probabilité. On pose : B = « on tire une blanche ». On a alors d'après la loi des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_0) + \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)$$
$$= \mathbb{P}_{A_0}(B) \times \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}_{A_1}(B) \times \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B) \times \mathbb{P}(A_2)$$
$$= \frac{14}{33} \times \frac{6}{13} + \frac{16}{33} \times \frac{7}{13} + \frac{1}{11} \times \frac{8}{13}$$

$$= \mathbf{\frac{220}{429}}$$
$$\approx \mathbf{0,513}$$

2) On cherche la probabilité suivante et on utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}\big((A_1 \cup A_2)\big|B\big) = \frac{\mathbb{P}\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\big)}{\mathbb{P}(B)}$$

De plus on sait que les évènements $(A_1 \cap B)$ et $(A_2 \cap B)$ sont incompatibles. On a donc :

$$\frac{\mathbb{P}\big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\big((A_1 \cap B)\big) + \mathbb{P}\big((A_2 \cap B)\big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{16}{33} \times \frac{7}{13} + \frac{1}{11} \times \frac{8}{13}}{\frac{220}{429}} = \frac{112 + 24}{220} = \mathbf{\frac{136}{220}} \approx \mathbf{0,62}$$

Là encore on peut faire un programme Python :

```
def exerciceB4(n):
    import random as r
    B=0    #Compte le nombre de blanches tirées
    UrneA=[]
    UrneB=[]
    for i in range(6):
        UrneA.append('blanche')
    for i in range(5):
        UrneA.append('noire')
    for i in range(8):
        UrneB.append('noire')
    for i in range(4):
        UrneB.append('blanche') #On crée les deux urnes
    for i in range(n):  #On réalise n parties
        c=UrneA
        a=r.sample(UrneB,2) #On tire deux boules dans l'urne B
        c=UrneA+a    #On les ajoute dans l'urne A
        d=r.choice(c) #On choisit une boule dans A
        if d=='blanche':
            B=B+1
    return (B/n)
```

Exercice B.5 : On dispose de N+1 urnes, numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et N-k boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.
1) Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?
2) Calculer la suite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

1) On pose A_k l'évènement on choisit l'urne k.
On pose B_i l'évènement «On tire une boule blanche au tirage i».
On pose $C_n = B_1 \cap \dots \cap B_n = \cap_{k=1}^{n} B_k$ l'évènement obtenir n boules blanches après n tirages. On a alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\big((B_1 \cap \dots \cap B_n) \cap A_k\big)$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1} \times \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

On a alors :

$$\mathbb{P}_{C_n}(\mathbf{B_{n+1}}) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{C_n} \cap \mathbf{B_{n+1}})}{\mathbb{P}(\mathbf{C_n})} = \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{N}}\right)^{n+1}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{N}}\right)^{n}} = \frac{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{N}}\right)^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{N}}\right)^{n}}$$

2) On sait que :

$$u_n = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N+1}\right)^n \times \left(\frac{N+1}{N}\right)^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N+1}} \underbrace{\left(\frac{N+1}{N}\right)^n}_{\to 1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N+1}\right)^n$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N+1}\right)^n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

C'est une somme de Riemann !

On a donc :

$$\lim_{N} \mathbb{P}_{C_n}(\mathbf{B_{n+1}}) = \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{n+2}}$$

On peut faire un programme Python pour illustrer cet exercice :

```python
def urne(N,n):
    import random as r
    urne=[]
    for i in range(0,N+1):
        a=[i]
        for k in range(i):
            a.append('blanche')
        for k in range(i-1,N-1):
            a.append('noire')
        urne.append(a)
    urneauhasard=r.randint(0,N)
    a=urne[urneauhasard]
    b=[]
    for i in range(n):
        c=r.randint(1,N)
        b.append(a[c])
    return(b,b.count('blanche'))
```

Exercice B.6 : Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.

Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les évènements A_n (resp. B_n, C_n) :

« Le mobile se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n » et les probabilités correspondantes $a_n = \mathbb{P}(A_n), b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.

2) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \text{ et } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$

4) En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Il faut faire un arbre de probabilité !

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n + c_n = 1$$

En effet le mobile est soit en A, soit en B soit en C.

2) D'après les probabilités totales on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} b_n + \frac{1}{6} c_n \\ b_{n+1} = a_n \times \frac{1}{6} + \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{6} c_n \\ c_{n+1} = a_n \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} b_n + \frac{2}{3} c_n \end{cases}$$

3) C'est immédiat :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - b_{n+1} = \left(a_n \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} b_n + \frac{1}{6} c_n\right) - \left(a_n \times \frac{1}{6} + \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{6} c_n\right)$$
$$= \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

On a de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - c_{n+1} = \left(a_n \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} b_n + \frac{1}{6} c_n\right) - \left(a_n \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} b_n + \frac{2}{3} c_n\right)$$
$$= \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$

4) On peut voir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - b_0) \text{ et } a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0)$$

On en déduit donc que :

$$2a_n - (b_n + c_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2a_0 - b_0 - c_0)$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n + c_n = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n + c_n = 1$$
$$3a_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2a_0 - b_0 - c_0)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (2a_0 - b_0 - c_0)$$

Par symétrie on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (2b_0 - a_0 - c_0)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (2c_0 - b_0 - a_0)$$

Remarque :

On peut faire cet exercice à l'aide des puissances de matrices !

On a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} b_n + \frac{1}{6} c_n \\ b_{n+1} = a_n \times \frac{1}{6} + \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{6} c_n \\ c_{n+1} = a_n \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} b_n + \frac{2}{3} c_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc par une récurrence triviale que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Il faut donc calculer :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^n$$

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=J} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_3}$$

On peut donc appliquer le binôme de Newton car J et I_3 commutent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \left(\frac{1}{6}J + \frac{1}{2}I_3\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}J\right)^k \left(\frac{1}{2}I_3\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} J^k$$

De plus on montre par récurrence (voir le chapitre calcul matriciel) par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1}J$$

ATTENTION : Cette formule est fausse pour $k = 0$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \left(\frac{1}{6}J + \frac{1}{2}I_3\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} 3^{k-1}\right) J$$

On calcule séparément :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} 3^{k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On en déduit donc que :

$$M^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) J$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0) + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n (2a_0-b_0-c_0) \\ \frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0) + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n (2b_0-a_0-c_0) \\ \frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0) + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n (2c_0-b_0-a_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n (2a_0-b_0-c_0) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n (2b_0-a_0-c_0) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n (2c_0-b_0-a_0) \end{pmatrix}$$

Partie C : Indépendance

Exercice C.1 : On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n-ième lancer ?

On pose :
F_n= « Obtenir le premier face au n-ième lancer ».
Comme les évènements sont indépendants, il suffit de faire :

$$\mathbb{P}(F_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3}$$

Exercice C.2 : Soit n un entier non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
b) Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?

On pose l'évènement :
A_n = « Obtenir n fois face en n lancer ».
On a :

$$\mathbb{P}(A_n) = (1-p)^n$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - (1-p)^n$$

b) On appelle A l'évènement cherché.
Il faut déterminer la première fois que l'on obtient face. En effet si l'on obtient face une foix, alors on ne peut plus obtenir de pile ensuite.
On a donc n cas distincts :

$$(F;F;\dots;F) \text{ avec proba} = (1-p)^n$$
$$(P;F;F;\dots;F) \text{ avec proba} = p\times(1-p)^{n-1}$$

Enfin :

$$(P;\dots;P) \text{ avec proba} = p^n$$

On a ici $n+1$ cas possibles tous disctincts, de même probabilité et indépendants. On obtient alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1} \text{ si } p \neq \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ si } p = \frac{1}{2}$$

Exercice C.3 : Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ un entier naturel non nul, décomposé en produit de facteurs premiers. On note $\phi(n)$ (et on appelle indicatrice d'Euler) le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. On se propose de démontrer que :

$$\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$, muni de la probabilité uniforme. On tire au hasard un nombre dans $[\![1,n]\!]$.
a) Si d est un diviseur de n, on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω et M'_d l'évènement tirer un multiple de d. Calculer $\mathbb{P}(M'_d)$.
b) Montrer que $M'_{p_1}, \dots, M'_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
c) En déduire la formule pour $\phi(n)$.

a) Soit d un diviseur de n. On sait que :

$$M_d = \left\{d, 2d, \dots, \left(\frac{n}{d}\right) \times d\right\}$$

On en déduit que :

$$\# M_d = \frac{n}{d}$$

Ainsi on a :

$$\mathbb{P}(M'_d) = \frac{1}{d}$$

b) On sait que :

$$\forall i \in [\![1,r]\!], = \left\{p_i, \dots, \left(\frac{n}{p_i}\right) \times p_i\right\}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(M'_{p_i}) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i}$$

De la même façon on a :

$$\forall I \in \mathcal{P}([\![1,r]\!]), \# I \neq \emptyset, \#\left(\bigcap_{i \in I} M_{p_i}\right) = \#\left\{p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_r^{\beta_r}, \forall i \in I, 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i\right\}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} M'_{p_i}\right) &= \frac{\#\left\{p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_r^{\beta_r}, \forall i \in [\![1,r]\!], 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i\right\}}{n} \\ &= \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i} \\ &= \prod_{i \in I} \mathbb{P}(M'_{p_i})\end{aligned}$$

Donc ils sont mutuellement indépendants.
c) Comme les évènements $M'_{p_1}, \dots, M'_{p_r}$ sont mutuellement indépendants, leurs complémentaires aussi. On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} \overline{M_{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}\left(\overline{M'_{p_i}}\right)$$

De plus on sait que $k \wedge n = 1 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,r]\!], p_i \nmid k$.
On a donc :

$$\prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}\left(\overline{M'_{p_i}}\right) = \frac{\phi(n)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$