Chapitre 27 : Déterminant
Partie A : Déterminant d'une matrice

Dans tout ce chapitre on pose $\mathbb{K}$ l'ensemble des nombres réels ou complexes, E un espace vectoriel de dimension n, $n \geq 2$.

I) Forme multilinéaire alternée

a) Définition

Définition/propriété I.a.1 (Forme multilinéaire alternée) : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique application $\Phi: E^n \to \mathbb{K}$ telle que :

- Φ est multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ces variables :
$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{E}^n, \forall \mathrm{j} \in [\![1;\mathrm{n}]\!], X \mapsto \Phi(f_1, \dots, f_{j-1}, X, f_{j+1}, \dots, f_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$$
- Φ est alternée :
$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{E}^n, \forall 1 \leq \mathrm{i} < \mathrm{j} \leq \mathrm{n}, f_i = f_j \Longrightarrow \Phi(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_n) = 0$$
- $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$

Φ est alors appelé le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de E, noté $det_{\mathcal{B}}: E^n \to \mathbb{K}$.

Exemple I.a.2 : On pose :
$$\mathcal{A}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \mapsto ad - bc \end{cases}$$
Alors $\mathcal{A} = det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^2)}$.

Propriété I.a.3 : Si f est une forme multilinéaire (on parle aussi de forme n −linéaire) sur E^n, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
$$f = \lambda \times det_{\mathcal{B}}$$

Propriété I.a.4 (déterminant entre deux bases) : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On a alors :
$$\forall (f_1, \dots,, f_n) = \mathcal{F} \in E^n, det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

b) Opérations et premiers calculs

Propriété I.b.1 (Opérations sur le déteminant) : On a :

1) Si $(f_1, \dots,, f_n) = \mathcal{F}$ contient O_E alors son déterminant est nul.
$$O_E \in \mathcal{F} \Longrightarrow det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$
2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :
$$det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_i}, \dots, \boldsymbol{f_j}, \dots, f_n)\right) = -det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_j}, \dots, \boldsymbol{f_i}, \dots, f_n)\right)$$
3) Les transvections ne changent pas le déterminant :
$$det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_i + \lambda f_j}, \dots, \boldsymbol{f_j}, \dots, f_n)\right) = det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots \boldsymbol{f_i}, \dots, \boldsymbol{f_j}, \dots, f_n)\right) \ (i \neq j)$$

Application I.b.2 : Calculer :
$$det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}\right)$$

Application I.b.3 : Calculer :

$$det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Application I.b.4 : Calculer :

$$det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^4)} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Proprosition I.a.7 (Caractérisation des bases par le déterminant) :

$$\mathcal{F} \text{ base de } E \Leftrightarrow det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

II) Déterminant d'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a) Les colonnes associées à des vecteurs

Définition : Soit $A = (C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut associer alors chaque colonne C_i à un vecteur de $\mathbb{R}^n$ exprimé dans la base canonique :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], C_i = Mat_{\mathcal{B}_c}(x_i)$$

On peut alors définir le déterminant de A, noté $\det(A)$ par :

$$\det(A) = det_{\mathcal{B}_c}(x_1, \dots, x_n)$$

On utilise alors une **notation particulière**.

Exemple II.a.1 : Calculer :

$$det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Cas particulier des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

Propriété II.b.1 : On a :

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ad - bc$$

Application II.b.2 : Calculer $\mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right)$

Propriété II.b.3 : On a :

$$det\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1$$

Remarque : On appelle cela la règle de Sarrus !

Application II.b.4 : Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Cas particuliers des matrices triangulaires

Propriété II.c.1 : Soit $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. On a alors :

$$det(T) = t_{1,1} \times t_{2,2} \times \ldots \times t_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}$$

Exemple II.c.2: Calculer :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 125 \\ 0 & 4 & 120 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Remarque : Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut donc appliquer un pivot de Gauss (pour l'instant sur les colonnes) pour se ramener à une matrice triangulaire supérieure ! Attention toutefois à la valeur des pivots !

Application II.c.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & a & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & a \end{vmatrix}$$