Chapitre 27 : Déterminant
Partie B : Matrices inversibles et déterminant - automorphisme

I) Un déterminant non nul

a) Une CNS

Propriété I.a.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

Application I.a.2 : Montrer que la matrice suivante est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Application I.a.3 : Démontrer que $\mathcal{B} = (1 + X + X^2, X^2, 1 + 3X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Application I.a.4 : Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} cos(a_1 + a_1) & cos(a_2 + a_1) & cos(a_3 + a_1) \\ cos(a_1 + a_2) & cos(a_2 + a_2) & cos(a_3 + a_2) \\ cos(a_1 + a_3) & cos(a_2 + a_3) & cos(a_3 + a_3) \end{vmatrix}$$

b) Déterminant du produit

Propriété II.a.1 : Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$det(A \times B) = det(A) \times det(B)$$

En particulier si A est inversible on a :

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Application II.a.2 : Démontrer que $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis calculer $\det(P_{B_c,B})$ et $\det(P_{B,B_c})$.

Application II.a.3 : On a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, det(A^p) = det(A)^p$$
$$det(PAP^{-1}) = det(A)$$

Remarque : On a

$$det(A \times B) = det(A) \times det(B) = det(B \times A)$$

Alors qu'en général on a $A \times B \neq B \times A$

II) Développement par rapport aux lignes ou aux colonnes

a) Un 1 et que des zéros

Propriété III.a.1 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0_{n-1,1} & A \end{vmatrix} \end{cases}$$

Alors $f = det$

Application III.a.2 : Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Application III.a.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix}$$

b) Transposée

Propriété II.b.1 : On a :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}), \det(\mathrm{A}) = \det(A^T)$$

Remarque : Les propriétés du déterminant, valable sur les colonnes, le sont également sur les lignes d'une matrice.

Application II.b.2 : Calculer le déterminant de :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

c) Déterminant et mineur

Définition : Soit $\mathrm{M} = (\mathrm{m}_{\mathrm{i,j}})_{1\leq \mathrm{i,j} \leq \mathrm{n}} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$. Pour tout $(\mathrm{i,j}) \in [\![1, \mathrm{n}]\!]^2$, on appelle mineur d'indice $(\mathrm{i,j})$, noté $\Delta_{\mathrm{i,j}}$, le déterminant de la matrice carrée d'ordre n-1 obtenue en rayant dans M la ligne i et la colonne j.

Exemple II.c.1 : On pose : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer $\Delta_{2,3}$.

$$\Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 1 \times 1 = 2$$

Exemple II.c.2 : On pose : $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\Delta_{4,3}$

Propriété II.c.3 : Pour tout matrice carrée $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}})_{1\leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, on peut calculer le déterminant de A :

- Par développement par rapport à la j-ième ligne :

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (-1)^{\mathrm{i+j}} \, \mathrm{a}_{\mathrm{i,j}} \Delta_{\mathrm{i,j}}$$

- Par développement par rapport à la i-ième ligne :

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} (-1)^{\mathrm{i+j}} \, \mathrm{a}_{\mathrm{i,j}} \Delta_{\mathrm{i,j}}$$

Application IIcb.4 : Calculer le déterminant de $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

III) Déterminant d'un endomorphisme

a) Invariance par changement de base

Propriété III.a.1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit B et B' deux bases de E. On a alors :

$$det(mat_B(f)) = det(mat_{B'}(f))$$

Application III.a.2 : Calculer le déterminant de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle déterminant de f, noté det(f), le déterminant de f dans n'importe quelle base de E.

Exemple III.a.3 : Calculer le déterminant que :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{cases}$$

Exemple III.a.4 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P + XP' \end{cases}$$

Calculer le déterminant de f.

Exemple III.a.5 : Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égale à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer det(φ).

b) Conséquence

Propriété III.b.1 : Soit p la projection sur E_1 parallèlement à $E_2 \neq \{0_E\}$. On a alors :

$$\det(p) = 0$$

Propriété III.b.2 : Soit s la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2. On a alors :

$$\det(s) = (-1)^{\dim(E_2)}$$

Propriété III.b.3 : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. On a :
(1) $det(fog) = det(f) \times det(g)$
(2) f est un automorphisme $\Leftrightarrow det(f) \neq 0$
On a alors :

$$det(f^{-1}) = \frac{1}{det(f)}$$

Application III.b.4 : Déterminer si l'endomorphisme suivant est un automorphisme :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{cases}$$