TD 27 : Déterminants

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

$$a=\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\2&2&1\end{vmatrix}\ ;\ b=\begin{vmatrix}3&-4&1\\2&-1&5\\1&-1&1\end{vmatrix},c=\begin{vmatrix}0&a&b\\a&0&c\\b&c&0\end{vmatrix},d=\begin{vmatrix}x+2&2x+3&3x+4\\2x+3&3x+4&4x+5\\3x+5&5x+7&7x+9\end{vmatrix},$$

$$e=\begin{vmatrix}1&\cos(a)&\cos(2a)\\\cos(a)&\cos(2a)&\cos(3a)\\\cos(2a)&\cos(3a)&\cos(4a)\end{vmatrix},f=\begin{vmatrix}a-b-c&2b&2c\\2a&b-c-a&2c\\2a&2b&c-a-b\end{vmatrix}$$

Exercice 2 : Calculer le déterminant de $A_n=\left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ avec $a_{i,j}=\min(i,j)\,,\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

Exercice 3 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}7&11\\-8&4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&0&6\\3&4&15\\5&6&21\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&5\\4&1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{pmatrix}$$

Exercice 4 : 1) Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

2) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs :

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

3) Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points à coefficients entiers est un nombre entier.

Exercice 5 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\2&3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&0&-5&15\\-2&7&3&0\\8&14&0&2\\0&-21&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&a&b&0\\a&a&0&b\\c&0&a&a\\0&c&a&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&0&0\\0&1&0&3&0\\a&0&a&0&3\\b&a&0&a&0\\0&b&0&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&-4&3&0&0\\-3&0&0&-3&-2\\0&1&7&0&0\\4&0&0&7&1\end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Calculer $\det(A_n)$ avec $A_n=(|i-j|)_{1\le i,j\le n}$

Exercice 7 : Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n, n\ge3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix}\cos(a_1+a_1)&\cos(a_1+a_2)&\dots&\cos(a_1+a_n)\\\cos(a_2+a_1)&\cos(a_2+a_2)&\dots&\cos(a_2+a_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\cos(a_n+a_1)&\cos(a_n+a_2)&&\cos(a_n+a_n)\end{vmatrix}=0$$

Exercice 8 : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{M}_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = \det\left(aI_{2n} + b\left(\sum_{k=1}^{2n} E_{2n+1-k,k}\right)\right)$$

Montrer que $\det(M_n) = (a^2 - b^2)^n$

Exercice 9 : On pose :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 2, D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & & (0) \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Déterminer une expression de D_n en fonction de n.

Exercice 10 : Soient $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \quad ; \quad B_n \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 11 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & \ddots & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1) Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2) Démontrer que :

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde) : Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)$$

Exercice 13 : Utiliser un déterminant pour montrer que les familles suivantes sont des bases de E :

a) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X(X-1)$ et $P_3(X) = (X-1)^2$

b) $E = \mathbb{C}^3, e_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2+i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$

Exercice 14 : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On pose :

$$u_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$$

a) Montrer que u est un endomorphisme.
b) Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.

Exercice 15 : Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égale à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_{x}^{x+1} P(t)dt$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

Exercice 16 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

a) On pose : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = C$.

c) Calculer $\det(C)$, $\det(f)$ et $\det(A)$.

Exercice 17 : Résoudre chacun des systèmes suivants

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases} ; \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$