Correction DS n°7

Exercice 1 : Du dénombrement qui a du chien

Dans cet exercice on donnera les résultats grâce aux factorielles ou à l'aide des coefficients binomiaux, mais on ne demande pas aux étudiants de les calculer.

1) Douze lévriers, numérotés de I à XII, participent à une course canine. La course s'arrête lorsque huit chiens ont passé la ligne d'arrivée ; les quatre derniers ne sont pas intégrés au classement général.

a) Combien y a-t-il de classements généraux possibles ?

b) Combien y a-t-il de classements généraux où les chiens IV, IX et II sont respectivement 1er, 2^{ième} et 3^{ième} ?

c) Combien y a-t-il de classements généraux où les chiens IV, IX et II occupent les 3 premières places ?

2) Un jeu de tarot est constitué de 78 cartes différentes. Trois de ces cartes ont un rôle particulier et sont appelées les *bouts*. On joue à quatre joueurs (inutile de vous rappeler que le tarot à 5 n'est pas du tarot !^^). On distribue 18 cartes à chaque joueur et l'ensemble des 6 cartes restantes constituent ce qu'on appelle le *chien* (ou l'écart, mais c'était moins drôle pour le titre !).

a) Combien y a-t-il de chiens possibles ?

b) Combien y a-t-il de chiens contenant les 3 bouts ?

c) Combien y a-t-il de chiens contenant au moins un bout ?

1) a) On a 12 possibilités pour le premier, puis 11, puis 10… jusque 5 possibilités pour le premier, ce qui donne :

$$Card(\{Classement\ possible\}) = 12 \times 11 \times \ldots \times 5 = \frac{12!}{4!}$$

b) On a 9 possibilités pour le 4^{ième}, puis 8 puis le cinquième… jusque 5 pour le 8^{ième} ce qui donne :

$$9 \times 8 \times \ldots \times 5 = \frac{9!}{4!}$$

c) On a trois choix pour le 1er, puis 2 puis 1, et ensuite on a $\frac{9!}{4!}$ ppour les suivants, ce qui donne :

$$3! \times \frac{9!}{4!}$$

2) a) On a :

$$\binom{78}{6}\ chiens\ possibles$$

b) Il reste à choisir 3 cartes parmi les 75 restantes :

$$\binom{75}{3}$$

c) On peut compter tous les chiens qui n'ont pas de bouts, soit :

$$\binom{75}{6}$$

Ensuite on a juste à faire l'ensemble des chiens possibles privés de l'ensemble des chiens sans bout :

$$\binom{78}{6} - \binom{75}{6}$$

On peut aussi regarder ceux qui ont 1 bout, 2 bouts et 3 bouts soit :

$$\binom{3}{1}\binom{75}{5} + \binom{3}{2}\binom{75}{4} + \binom{3}{3}\binom{75}{3}$$

Ce qui revient au même !

Problème 1 : La constante γ d'Euler

Dans tout cet exercice on pose :

$$\forall n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette série s'appelle la série harmonique (d'où le H !).

Partie A : Etude asymptotique de H_n

1) a) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

c) En déduire que :

$$H_n \sim \ln(n)$$

On va à présent affiner cet équivalent. Ce n'est pas parce que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes qu'elles « se rapprochent » l'une de l'autre en $+\infty$.

2) Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ u_n - v_n \to +\infty \end{cases}$$

Nous allons voir que l'écart entre H_n et $\ln(n)$ tend vers une limite finie, appelée γ, la « constante gamma d'Euler », découverte par ce dernier !

Dans toute la suite on pose :

$$\forall n \geq 1, u_n = H_n - \ln(n)$$

3) a) Démontrer que :

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{-1}{2n^2}$$

b) En déduire que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \; tel\ que\ H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Partie B : La série harmonique alternée, version 1 : A l'aide de la partie A

On veut à présent calculer la limite de :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} = H_{2n} - H_n$$

2) Exprimer A_{2n+1} en fonction de H_{2n+1} et H_n.

3) A l'aide de la partie A, déterminer la convergence de (A_n) ainsi que sa limite.

Partie C : La série harmonique alternée, version 2 : A l'aide de l'intégration

1) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, A_n - \ln(2) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

2) a) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u}dt$$

b) En déduire que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt \leq \frac{1}{n+1}$$

c) En déduire la convergence de (A_n) et sa limite.

Partie A : Etude asymptotique de H_n

1) a) On peut le faire de plusieurs façons différentes.

Méthode 1 : Inégalité des accroissements finis :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme ln est $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ on peut appliquer l'égalité des accroissements finis :

$$\exists c_k \in]k;k+1[\ tel\ que \frac{f(k+1)-f(k)}{k+1-k} = f'(c_k) = \frac{1}{c_k}$$

De plus on a :

$$k < c_k < k+1 \Longrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{c_k} \leq \frac{1}{k}$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Méthode 2 : Par croissance de l'intégrale

On a :

$$\forall x \in [k;k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Méthode 3 : Par double inégalité et étude de fonction

On peut bien sûr étudier les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \ln(1+x) - \ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$f_2 : x \mapsto \ln(1+x) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$$

Mais cela est plus fastidieux !

b) On sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or on a par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\geq 1, \ln(n+1)\leq H_n$$

De plus on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=H_{n+1}-1$$

On a donc :

$$\forall n\geq 1, H_{n+1}-1\leq \ln(n+1)$$
$$\Longrightarrow \forall n\geq 1, H_{n+1}\leq \ln(n+1)+1$$
$$\Longrightarrow \forall n\geq 2, H_n\leq \ln(n)+1$$

Il reste à le vérifier pour $n=1$:

$$H_1=1\ et\ \ln(1)+1=1\Longrightarrow H_1\leq \ln(1)+1$$

On a donc :

$$\forall n\geq 1, H_n\leq \ln(n)+1$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n\geq 1, \ln(n+1)\leq H_n\leq \ln(n)+1}$$

c) On a :

$$\forall n\geq 2, \ln(n+1)\leq H_n\leq \ln(n)+1\Longrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\leq \frac{H_n}{\ln(n)}\leq 1+\frac{1}{\ln(n)}$$

Car $\ln(n)>0$.

De plus on a :

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)=1$$

$$\lim_n\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\lim_n\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=1\ (par\ continuité\ de\ \ln\quad en\ 1)$$

Par le théorème des gendarmes on en déduit donc que :

$$\lim_n\frac{H_n}{\ln(n)}=1$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{H_n\sim \ln(n)}$$

2) On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=n^2+n\ et\ v_n=n^2$$

On a alors :

$$\begin{cases}\boldsymbol{u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n}\\ \boldsymbol{u_n-v_n\to+\infty}\end{cases}$$

3) a) On a :

$$\forall n\geq 1, u_n=H_n-\ln(n)$$
$$\Longrightarrow u_{n+1}-u_n=H_{n+1}-\ln(n+1)-H_n+\ln(n)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

Or on sait que :

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On en déduit donc que :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^{2}} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^{2}} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2(n+1)^{2}} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

On a donc :

$$u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2(n+1)^{2}}$$

Or on a :

$$\lim_n \frac{\frac{-1}{2(n+1)^{2}}}{\frac{-1}{2n^2}} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1 \ (\hat{a}r\ continuit\acute{e}\ de\ x \mapsto x^2 en\ 1)$$

On a donc :

$$-\frac{1}{2(n+1)^{2}} \sim \frac{-1}{2n^2}$$

Par transitivité :

$$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \sim \frac{-1}{2n^2}}$$

b) On sait d'après le critère de Riemann que :

$$\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)\ converge \Rightarrow \left(\sum \frac{-1}{2n^2}\right)\ converge \Rightarrow \left(\sum (u_{n+1} - u_n)\right)\ converge$$

On en déduit donc que :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}\ tel\ que :$$
$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \ell$$

Or on a :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$
$$\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R}\ \ tel\ que\ u_{n+1} - u_1 = \ell$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_{n+1} = \lim_n u_n = 1 + \ell$$

On a donc :

$$\lim_n \big(H_n - \ln(n) - (1+\ell)\big) = 0$$

On pose :

$$\gamma = 1 + \ell$$

On a donc :

$$\lim_n (u_n - \gamma) = 0$$

De plus on sait d'après la question $1, b)$ que :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq H_n - \ln(n) \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_n \geq 0 \Longrightarrow \gamma \geq 0$$

De plus si on pose :

$$v_n = u_n - \gamma$$

On a :

$$v_n \to 0 \Longrightarrow v_n = o(1)$$

On en déduit donc que :

$$u_n - \gamma = o(1) \Longrightarrow H_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$$
$$\Longrightarrow \exists \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^+ \ \boldsymbol{tel\ que\ H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

Partie B : La série harmonique alternée, version 1 : A l'aide de la partie A

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} = A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots . + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2 \times \left(\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)\right) = H_{2n} - 2 \times \frac{1}{2} H_n$$
$$= \boldsymbol{H_{2n} - H_n}$$

2) On a :

$$\boldsymbol{A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{1}{2n+1} = H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n+1} = H_{2n+1} - H_n}$$

3) On sait que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \Longrightarrow H_{2n} = \ln(2n) + \gamma + o(1)$$
$$\Longrightarrow A_{2n} = H_{2n} - H_n = \ln(2) + o(1) \to \ln(2)$$

De même on a :

$$A_{2n+1} = H_{2n+1} - H_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + o(1)$$

Or on a :

$$\lim_n \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim_n \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \ln(2) \ \left(par\ continuité\ de \ln en\ 2\right)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n A_{2n} = \lim_n A_{2n+1} = \ln(2)$$

Comme tout nombre est pair ou impair, en revenant à la définition de la limite avec les epsilon, on a :

$$\lim_n A_n = \ln(2):$$
$$\boldsymbol{A_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)}$$

Remarque : On a démontré dans le cours sur les limites de suite que si $u_{2n} \to \ell\ et\ u_{2n+1} \to \ell$ alors $u_n \to \ell$.

Partie C : La série harmonique alternée, version 2 : A l'aide de l'intégration

1) On peut faire une récurrence :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) = "A_n - \ln(2) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt"$$

Initialisation : $n = 1$

$$A_1 = 1$$

De plus on a :

$$(-1)^{1+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{(1+t)^{1+1}} dt = \int_0^1 \frac{1-t}{(1+t)^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t+2}{(1+t)^2} dt + 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2} [\ln[(1+t)^2]]_0^1 + 2 \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1$$

$$= -\ln(2) + 1$$

On a donc :

$$(-1)^{1+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{(1+t)^{1+1}} dt = A_1 - \ln(2)$$

Hérédité : Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 1, fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$A_n - \ln(2) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

De plus on a :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = \int_0^1 (1-t)^n (1+t)^{-(n+1)}\, dt$$

On effectue une IPP :

$$\int_0^1 \underbrace{(1-t)^n}_{u_n'(t)} \underbrace{(1+t)^{-(n+1)}}_{=v_n(t)} dt$$

$$= \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} (1+t)^{-(n+1)}\right]_0^1 - \frac{(n+1)}{n+1} \int_0^1 (1-t)^{n+1} (1+t)^{-(n+1)-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}} dt$$

On en déduit donc que :

$$A_n - \ln(2) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}} dt$$

$$\Longrightarrow A_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} - \ln(2) = (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}} dt$$

Or :

$$A_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} = A_n + \frac{(-1)^n}{n+1} = A_{n+1}$$

On a donc :

$$A_{n+1} - \ln(2) = (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}} dt$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence on a :

$$\forall n \geq 1, A_n - \ln(2) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

2) a) On pose le changement de variable

$$u = \frac{1-t}{1+t}$$

On a donc :
1) Bornes :

$$\begin{cases} t = 1 \Longrightarrow u = 0 \\ t = 0 \Longrightarrow u = 1 \end{cases}$$

2) Calcul du dt

$$u = \frac{1-t}{1+t} \Longrightarrow u(1+t) = 1-t \Longrightarrow t(1+u) = 1-u \Longrightarrow t = \frac{1-u}{1+u}$$
$$\Longrightarrow dt = \frac{-(1+u)-(1-u)}{(1+u)^2} du = \frac{-2}{(1+u)^2} du$$

3) On remplace :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n \times \frac{1}{1+t} dt$$

On a :

$$1 + t = 1 + \frac{1-u}{1+u} = \frac{2}{1+u}$$

On a alors :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n \times \frac{1}{1+t} dt = \int_1^0 u^n \times \frac{1+u}{2} \times \frac{2}{(1+u)^2} du = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} dt$$

b) On a :

$$\forall u \in [0;1], 1 \leq 1+u \leq 2$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 \; (car\ x \mapsto \frac{1}{x}\ est\ décroissante)$$
$$\Longrightarrow 0 \leq \frac{u^n}{2} \leq \frac{u^n}{1+u} \leq u^n \; (car\ u^n \geq 0)$$
$$\Longrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} dt \leq \int_0^1 u^n\, dt$$

D'après la croissance de l'intégrale.
Or on a :

$$\int_0^1 u^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq |A_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Or on a :

$$\lim_n \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_n |A_n - \ln(2)| = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n A_n = \ln(2)$$

Problème 2 : Endomorphismes échangeurs

Définition : Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un endomorphisme est échangeur si et seulement s'il existe deux sous-espaces vectoriels $F \; et \; G$ de E tels que :

$$\begin{cases} E = F \oplus G \\ u(F) \subseteq G \\ u(G) \subseteq F \end{cases}$$

Partie A : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ -2x - y \\ 2x + y + z \end{pmatrix} \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) On pose :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; tel \; que - y + z = 0 \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

b) Démontrer que f est échangeur.

Dans les deux parties suivantes, nous prenons E un espace vectoriel de **dimension finie**, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\exists(\phi_1,\phi_2) \in \left(\mathcal{L}(E)\right)^2 \ tel\ que \begin{cases} u = \phi_1 + \phi_2 \\ (\phi_1)^2 = (\phi_2)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{cases}$$

Partie B : Cas où u est un automorphisme

Dans cette partie on suppose que $u \in \mathcal{GL}(E)$.

1) a) Démontrer que :

$$\phi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow Im(\phi) \subset \ker(\phi)$$

b) En déduire que :

$$\dim(ker(\phi)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$$

2) Sachant que u est un automorphisme de E, démontrer que :

a) $E = \ker(\phi_1) \oplus \ker(\phi_2)$

b) Montrer que $\ker(\phi_1) = Im(\phi_1)\ et \ker(\phi_2) = Im(\phi_2)$

(***Indice*** : On pourra raisonner sur $rg(\phi_1)\ et\ rg(\phi_2)$).

c) Démontrer que u est un échangeur.

Partie C : Cas où u n'est pas un automorphisme

Dans cette partie on suppose que u n'est pas un automorphisme.

On note :

$$\forall k \in \mathbb{N}, F_k = Ker(u^k)\ et\ G_k = Im(u^k)$$

1) a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, F_k \subset F_{k+1}$$

(On dit que la suite d'espaces vectoriels $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion).

b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, G_{k+1} \subset G_k$$

2) a) On pose $A = \{k \in \mathbb{N}, F_k = F_{k+1}\}$. Montrer que A est non vide.

b) On pose $p = \min(A)$. Montrer que $p \geq 1$.

c) Montrer que :

$$\forall k \geq p, F_k = F_p\ et\ G_k = G_p$$

*(**Indice** : On pourra faire une récurrence sur* k).

3) a) Montrer que F_{2p} est stable par u (c'est-à-dire que $\forall e \in F_{2p}, u(e) \in F_{2p}$)

b) On pose

$$u_0 : \begin{cases} F_{2p} \to F_{2p} \\ x \mapsto u(x) \end{cases}, \left(c'est - \text{à} - dire\ u_0 = u|_{F_{2p}} \right)$$

On dit que u_0 est l'endomorphisme induit par u sur F_{2p}. (On peut le faire car F_{2p} stable par u).

Montrer que u_0 est nilpotent, c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbb{N}, tel\ que\ (u_0)^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

4) a) Montrer que G_{2p} est stable par u et que l'endomorphisme u_1 induit par u sur G_{2p} est un automorphisme.

b) Montrer que $\phi_1\ et\ \phi_2$ commutent avec u^2. En déduire que G_{2p} est stable par $\phi_1\ et\ \phi_2$.

5) a) Montrer que $E = F_{2p} \oplus G_{2p}$.

b) On admet dans cette question que tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est un échangeur. Montrer que u est un échangeur.

Partie A : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-z \\ 2z-2y \\ 2x-y+2z \end{pmatrix} \end{cases}$$

1) On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (e_1, e_2) \in (\mathbb{R}^3)^2,$$

$$f(\lambda e_1 + e_2) = f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) \\ 2(\lambda z_1 + z_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) \\ 2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} y_1 - z_1 \\ 2z_1 - 2y_1 \\ 2x_1 - y_1 + 2z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ 2z_2 - 2y_2 \\ 2x_2 - y_2 + 2z_2 \end{pmatrix} = \lambda f(e_1) + f(e_2)$$

Donc $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^3)$

2) On a :

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \; car \; y = z \Leftrightarrow e = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a :

$$F = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

De plus :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; et \; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc forment une base de F.

De plus on a :

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; z \in \mathbb{R}\right\} = vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de G.

Montrons que $B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_1}; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_2}; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_3}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

_ $\boldsymbol{Card(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)}$

_ Il suffit donc de montrer que ***B* est libre**.

On résout :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc B est libre. Donc comme son cardinal est 3, B est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) On a :

$$\forall e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in F, f(e) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix} = (x+y)e_3 \in G$$

$$\forall e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in G, f(e) = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ 2z \end{pmatrix} \Longrightarrow y_{f(e)} = z_{f(e)} \Longrightarrow f(e) \in F$$

Donc ***f* est un échangeur**.

Partie B : Cas où u est un automorphisme

1) a) On a :

$$e \in Im(\phi) \Longrightarrow \exists e_1 \in E \; tel \; que \; e = \phi(e_1) \Longrightarrow \phi(e) = \phi^2(e_1) = 0 \Longrightarrow e \in \ker(\phi)$$

Donc

$$\boldsymbol{\phi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow Im(\phi) \subset \ker(\phi)}$$

b) On sait d'après le théorème du rang que :

$$rg(\phi) + \dim(ker(\phi)) = \dim(E)$$

Or $Im(\phi) \subset \ker(\phi) \Longrightarrow rg(\phi) \leq \dim(ker(\phi))$

On a donc :

$$\dim(E) = rg(\phi) + \dim(ker(\phi)) \leq 2\dim(ker(\phi))$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \dim(ker(\phi)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)}$$

2) a) Montrons que $\ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2) = \{0_E\}$

On pose :

$$e \in \ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2)$$

On a donc :

$$u(e) = (\phi_1 + \phi_2)(e) = \phi_1(e) + \phi_2(e) = 0_E \Longrightarrow e \in \ker(u)$$

Or u est un automorphisme donc $\ker(u) = \{0_E\}$ donc $e = 0_E$.

On a donc :

$$\ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2) = \{0_E\}$$

On a donc :

$$\ker(\phi_1) + \ker(\phi_2) = \ker(\phi_1) \oplus \ker(\phi_2)$$

De plus on sait d'après la question précédente que :

$$\dim(ker(\phi)) \geq \frac{1}{2}\dim(E) \Longrightarrow \dim(ker(\phi_1)) + \dim(ker(\phi_2)) \geq \dim(E)$$

Or on sait que :

$$\ker(\phi_1) \oplus \ker(\phi_2) \subset E \Longrightarrow \dim\left(\ker(\phi_1) \bigoplus \ker(\phi_2)\right) \leq \dim(E)$$

Comme on a une somme directe on a :

$$\dim\left(\ker(\phi_1) \bigoplus \ker(\phi_2)\right) = \dim(ker(\phi_1)) + \dim(ker(\phi_2))$$

Donc a donc :

$$\begin{cases} \dim(ker(\phi_1)) + \dim(ker(\phi_2)) \geq \dim(E) \\ \dim(ker(\phi_1)) + \dim(ker(\phi_2)) \leq \dim(E) \end{cases}$$

Donc $\dim(ker(\phi_1)) + \dim(ker(\phi_2)) = \dim(E)$

On a donc :

$$\boldsymbol{E = \ker(\phi_1) \oplus \ker(\phi_2)}$$

b) On sait d'après le théorème du rang que :

$$\begin{cases} rg(\phi_1) + \dim(ker(\phi_1)) = \dim(E) \\ rg(\phi_2) + \dim(ker(\phi_2)) = \dim(E) \end{cases}$$

On a donc :

$$rg(\phi_1) + \dim(ker(\phi_1)) + rg(\phi_2) + \dim(ker(\phi_2)) = 2\dim(E)$$

Or $\dim(ker(\phi_1)) + \dim(ker(\phi_2)) = \dim(E)$.

On a donc :

$$rg(\phi_1) + rg(\phi_2) = \dim(E)$$

De plus on a : $Im(\phi_i) \subset \ker(\phi_i)$ donc $rg(\phi_1) \leq \dim(ker(\phi_1))$

Si :

$Im(\phi_1)$ est inclus strictement dans $\ker(\phi_1)$, alors $rg(\phi_1) < \dim(ker(\phi_1))$ et donc :

$$rg(\phi_1) + rg(\phi_2) < \dim(ker(\phi_1)) + \dim(ker(\phi_2))$$

$$\Longrightarrow rg(\phi_1) + rg(\phi_2) < \dim(E)$$

Impossible. De même nous ne pouvons avoir $rg(\phi_2) < \dim(ker(\phi_2))$.

On a donc :

$$\boldsymbol{\begin{cases} Im(\phi_i) \subset \ker(\phi_i) \\ \dim(Im(\phi_i)) = \dim(ker(\phi_i)) \end{cases} \Longrightarrow Im(\phi_i) = \ker(\phi_i)}$$

c) On a :

$$E = \ker(\phi_1) \oplus \ker(\phi_2)$$

De plus :

$$\forall e_2 \in \ker(\phi_2), u(e_2) = (\phi_1 + \phi_2)(e_2) = \phi_1(e_2) + \underbrace{\phi_2(e_2)}_{=0_E} = \phi_1(e_2)$$

$$\Longrightarrow u(e_2) \in Im(\phi_1) \subset \ker(\phi_1) \Longrightarrow u(e_2) \in \ker(\phi_1)$$

De même on a :

$$\forall e_1 \in \ker(\phi_1), u(e_1) = (\phi_1 + \phi_2)(e_1) = \phi_2(e_1) \in Im(\phi_2) \subset \ker(\phi_2)$$

Donc on a :

$$u\big(\ker(\phi_2)\big) \subset \ker(\phi_1)\ et\ u\big(\ker(\phi_1)\big) \subset \ker(\phi_2)$$

***u* est donc un échangeur.**

Partie C : Cas où *u* n'est pas un automorphisme

1) On a :

$$\forall e \in F_k, u^k(e) = 0_E \Longrightarrow u^{k+1}(e) = u\big(u^k(e)\big) = u(0_E) = 0_E \Longrightarrow e \in F_{k+1}$$

$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{F_k} \subset \boldsymbol{F_{k+1}}$$

b) De même on a :

$$\forall e \in G_{k+1}, \exists e_1 \in E\ tel\ que\ e = u^{k+1}(e_1) = u^k\big(u(e_1)\big) \Longrightarrow e \in G_k$$

$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{G_{k+1}} \subset \boldsymbol{G_k}$$

2) a) On pose :

$$A = \{k \in \mathbb{N}, F_k = F_{k+1}\}$$

On raisonne par l'absurde :

Si $A = \emptyset$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, F_k \neq F_{k+1}$$

De plus on a démontré à la question précédente que :

$$F_k \subset F_{k+1} \Longrightarrow \dim(F_k) \leq \dim(F_{k+1})$$

Si :

$$F_k \neq F_{k+1} \Longrightarrow \dim(F_k) < \dim(F_{k+1})$$

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \dim(F_k)$$

On en déduit donc que (u_n) est une suite strictement croissante d'entier naturel. Ainsi $u_n \to +\infty$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \dim(E)$$

Cela est donc impossible. On en déduit donc que ***A* est non vide**.

b) Soit $p = \min(A) \in \mathbb{N}$. Si $p = 0 \Longrightarrow F_0 = F_1$

Or $F_0 = \dim(ker(u^0)) = \dim(\ker(Id_E)) = 0$

De plus u n'étant pas inversible, $\dim(ker(u)) \geq 1$. Donc $\mathbf{dim}(\boldsymbol{F_0}) < \mathbf{dim}(\boldsymbol{F_1})$

Ainsi $\boldsymbol{p \geq 1}$.

On pose :

$$\forall k \geq p, \mathcal{P}(k) = "F_k = F_p \ et \ G_k = G_p \ "$$

Initialisation : $k = p$. Immédiat.

Hérédité : Soit $k \geq p$ un entier naturel. On suppose que :

$$F_k = F_p \ et \ G_k = G_p$$

Montrons que :

$$F_{k+1} = F_p \ et \ G_{k+1} = G_p$$

1er cas : $\boldsymbol{F_{k+1} = F_p}$

On sait que $F_k \subset F_{k+1}$. Montrons l'inclusion réciproque.

On a :

$$e \in F_{k+1} \Longrightarrow u^{k+1}(e) = 0 \Longrightarrow u^k\big(u(e)\big) = 0_E \Longrightarrow u(e) \in F_k$$

$$\Longrightarrow u(e) \in F_p \ (d'après \ l'hypothèsede \ récurrence \ !)$$

$$\Longrightarrow u^p\big(u(e)\big) = 0_E \Longrightarrow u^{p+1}(e) = 0_E \Longrightarrow e \in F_{p+1}$$

Or on sait d'après la définition de p que $F_p = F_{p+1}$. Donc $e \in F_p$.

Donc $F_{k+1} \subset F_p \Longrightarrow F_{k+1} = F_p$.

2ième cas : $\boldsymbol{G_{k+1} = G_p}$

On sait que $G_{k+1} \subset G_k$. On en déduit donc que :

$$\dim(G_{k+1}) \leq \dim(G_k)$$

De plus on sait d'après le théorème du rang que :

$$\dim(G_k) + \dim(F_k) = \dim(E) = \dim(G_{k+1}) + \dim(F_{k+1})$$

Or nous avons démontré précédemment que $F_{k+1} = F_k$. On en déduit donc que :

$$\dim(G_{k+1}) = \dim(G_k)$$

Donc $\boldsymbol{G_{k+1} = G_k = G_p}$.

Conclusion : On conclut d'après l'hypothèse de récurrence.

3) a) On a :

$$\forall e \in F_{2p}, u^{2p}(e) = 0 \Longrightarrow u(u^{2p}(e))) = u(0_E) = 0_E \Longrightarrow u^{2p}\big(u(e)\big) = 0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{u(e) = 0_E}$$

b) On a :

$$\forall e \in F_{2p}, u^{2p}(e) = 0_E \Longrightarrow (u_1)^{2p} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Donc **$\boldsymbol{u_1}$ est nilpotente d'ordre 2p**.

4) a) On a :

$$\forall e \in G_{2p}, \exists e_1 \in E \; tel \; que \;\; u^{2p}(e_1) = e \Longrightarrow u(e) = u(u^{2p}(e))) = u^{2p}\big(u(e_1)\big)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{u(e) \in G_{2p}}$$

b) On cherche $\ker(u_1)$. On a :

$$e \in \ker(u_1) \Longrightarrow u_1(e) = 0_E \Longrightarrow u(e) = 0_E \; et \; e \in G_{2p}$$

$$\Longrightarrow \exists e_1 \in E \; tel \; que \; u(e) = 0_E \; et \; e = u^{2p}(e_1)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{u^{2p+1}(e_1) = 0_E \Longrightarrow e_1 \in F_{2p+1}}$$

On en déduit donc que $e_1 \in F_{2p+1}$

Or on sait que :

$$F_{2p+1} = F_{2p} \; car \; 2p + 1 > p$$

On a donc :

$$e_1 \in F_{2p} \Longrightarrow u^{2p}(e_1) = 0_E = e$$

Donc $\boldsymbol{\ker(u_1) = \{0_E\}}$ donc u_1 est un automorphisme.

b) On a :

$$u = \phi_1 + \phi_2 \Longrightarrow u^2 = (\phi_1 + \phi_2)^2 = \phi_1^2 + \phi_1 o \phi_2 + \phi_2 o \phi_1 + \phi_2^2 = \phi_1 o \phi_2 + \phi_2 o \phi_1$$

Ainsi on a :

$$\phi_1 o(u^2) = \phi_1 o(\phi_1 o \phi_2 + \phi_2 o \phi_1) = (\phi_1^2) o \phi_2 + \phi_1 o \phi_2 o \phi_1 = \phi_1 o \phi_2 o \phi_1$$

De même on a :

$$u^2 o \phi_1 = (\phi_1 o \phi_2 + \phi_2 o \phi_1) o \phi_1 = \phi_1 o \phi_2 o \phi_1 + \phi_2 o (\phi_1)^2 = \phi_1 o \phi_2 o \phi_1$$

Ainsi ϕ_1 est u^2 commutent, de même que ϕ_2 et u^2 de façon analogue.

On a :

$$e \in G_{2p} \Longrightarrow \exists e_1 \in E \; tel \; que \; e = u^{2p}(e_1) = (u^2)^p(e_1)$$

$$\Longrightarrow \phi_1(e) = \phi_1 o\big((u^2)^p(e_1)\big) = \big(\phi_1 o (u^2)\big)(e_1) = (u^2 o \phi_1)(e_1) = u^{2p}\big(\phi_1(e_1)\big)$$

$$\Longrightarrow \;\; \phi_1(e) \in G_{2p}$$

Ainsi G_{2p} est stable par ϕ_1. On fait de même avec ϕ_2.

5) a) On sait déjà d'après le théorème du rang que :

$$\dim(F_{2p}) + \dim(G_{2p}) = \dim(E)$$

Soit $e \in F_{2p} \cap G_{2p}$. On a alors :

$$u^{2p}(e) = 0_E \ et \ e = u^{2p}(e_1)$$

On en déduit donc que :

$$u^{2p}(u^{2p}(e_1)) = 0 \Longrightarrow e_1 \in F_{4p}$$

Or $4p \geq 2p \geq p \Longrightarrow e_1 \in F_{2p} \Longrightarrow u^{2p}(e_1) = 0_E = e$

Ainsi on a :

$$F_{2p} \cap G_{2p} = \{0_E\}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{E = F_{2p} \oplus G_{2p}}$$

b) On a :

$$\forall e \in F_{2p}, u(e) = u_0(e)$$

Or **u_0 est nilpotente** donc c'est un échangeur. Il existe $(A_0, B_0) \in (F_{2p})^2$ tel que $A_0 \oplus B_0 = F_{2p}$ tel que :

$$u_0(A_0) \subset B_0 \ et \ u(B_0) \subset A_0$$

De plus on a :

$$\forall e \in G_{2p}, u(e) = \phi_1(e) + \phi_2(e)$$

Or $\phi_1 \ et \ \phi_2$ sont stables par G_{2p} donc on peut construire l'endomorphisme induit $\psi_1 \ et \ \psi_2$ tel que :

$$\psi_i : \begin{cases} G_{2p} \to G_{2p} \\ e \mapsto \phi_i(e) \end{cases}$$

On a alors :

$$u_1 = \psi_1 + \psi_2 \ automorphisme \ et \ \psi_1^2 = \psi_2^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

D'après la partie B, on sait que u_1 est un échangeur. On a donc :

$$\exists (A_1, B_1) \in (G_{2p})^2 \ tel \ que \ A_1 \oplus B_1 = G_{2p} \ et :$$

$$u_1(A_1) \subset B_1 \ et \ u(B_1) \subset A_1$$

On a donc :

$$\boldsymbol{E = F_{2p} \oplus G_{2p} = (A_0 \oplus B_0) \oplus (A_1 \oplus B_1)}$$

En prenant une base de chaque A_0, A_1, B_1, B_0 puis en les permutant on a :

$$\boldsymbol{E = (A_0 \oplus A_1) \oplus (B_0 \oplus B_1) = A \oplus B}$$

De plus on a :

$$\forall a \in A, \exists (a_0, a_1) \in A_0 \times A_1 \; tel \; que \; u(a) = u(a_0) + u(a_1) = \underbrace{u_0(a_0)}_{\in B_0} + \underbrace{u_1(a_1)}_{\in B_1} \in B_0 \times B_1 \in B$$

De même :

$$\forall b \in B, \exists (b_0, b_1) \in B_0 \times B_1 \; tel \; que \; u(b) = u(b_0) + u(b_1) = \underbrace{u_0(b_0)}_{\in A_0} + \underbrace{u_1(b_1)}_{\in A_1} \in A_0 \times A_1 \in A$$

Donc **$\boldsymbol{u}$ est un échangeur.**