# DS n°7

## Exercice 1 : Du dénombrement qui a du chien

Dans cet exercice on donnera les résultats grâce aux factorielles ou à l'aide des coefficients binomiaux, mais on ne demande pas aux étudiants de les calculer.

1) Douze lévriers, numérotés de I à XII, participent à une course canine. La course s'arrête lorsque huit chiens ont passé la ligne d'arrivée ; les quatre derniers ne sont pas intégrés au classement général.

a) Combien y a-t-il de classements généraux possibles ?

b) Combien y a-t-il de classements généraux où les chiens IV, IX et II sont respectivement 1^er^, 2^ième^ et 3^ième^ ?

c) Combien y a-t-il de classements généraux où les chiens IV, IX et II occupent les 3 premières places ?

2) Un jeu de tarot est constitué de 78 cartes différentes. Trois de ces cartes ont un rôle particulier et sont appelées les *bouts*. On joue à quatre joueurs (inutile de vous rappeler que le tarot à 5 n'est pas du tarot !^^). On distribue 18 cartes à chaque joueur et l'ensemble des 6 cartes restantes constituent ce qu'on appelle le *chien* (ou l'écart, mais c'était moins drôle pour le titre !).

a) Combien y a-t-il de chiens possibles ?

b) Combien y a-t-il de chiens contenant les 3 bouts ?

c) Combien y a-t-il de chiens contenant au moins un bout ?

## Problème 1 : La constante $\gamma$ d'Euler

Dans tout cet exercice on pose :

$$\forall n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette série s'appelle la série harmonique (d'où le H !).

### Partie A : Etude asymptotique de $H_n$

1) a) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

c) En déduire que :

$$H_n \sim \ln(n)$$

On va à présent affiner cet équivalent. Ce n'est pas parce que deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont équivalentes qu'elles « se rapprochent » l'une de l'autre en $+\infty$.

2) Déterminer deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que :

$$\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ u_n - v_n \to +\infty \end{cases}$$

Nous allons voir que l'écart entre $H_n$ et $\ln(n)$ tend vers une limite finie, appelée $\gamma$, la « constante gamma d'Euler », découverte par ce dernier !

Dans toute la suite on pose :

$$\forall n \geq 1, u_n = H_n - \ln(n)$$

3) a) Démontrer que :

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{-1}{2n^2}$$

b) En déduire que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \; tel \; que \; H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

**Partie B : La série harmonique alternée, version 1 : A l'aide de la partie A**

On veut à présent calculer la limite de :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} = H_{2n} - H_n$$

2) Exprimer $A_{2n+1}$ en fonction de $H_{2n+1}$ et $H_n$.

3) A l'aide de la partie $A$, déterminer la convergence de $(A_n)$ ainsi que sa limite.

**Partie C : La série harmonique alternée, version 2 : A l'aide de l'intégration**

1) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, A_n - \ln(2) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

2) a) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} dt$$

b) En déduire que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

c) En déduire la convergence de $(A_n)$ et sa limite.

## Problème 2 : Endomorphismes échangeurs

**Définition** : Soit $E$ un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un endomorphisme est échangeur si et seulement s'il existe deux sous-espaces vectoriels $F \; et \; G$ de $E$ tels que :

$$\begin{cases} E = F \oplus G \\ u(F) \subseteq G \\ u(G) \subseteq F \end{cases}$$

## Partie A : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ -2x - y \\ 2x + y + z \end{pmatrix} \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) On pose :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; tel\ que - y + z = 0 \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

b) Démontrer que $f$ est échangeur.

Dans les deux parties suivantes, nous prenons $E$ un espace vectoriel de **dimension finie**, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\exists (\phi_1, \phi_2) \in \left(\mathcal{L}(E)\right)^2 \; tel\ que \; \begin{cases} u = \phi_1 + \phi_2 \\ (\phi_1)^2 = (\phi_2)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{cases}$$

## Partie B : Cas où $u$ est un automorphisme

Dans cette partie on suppose que $u \in \mathcal{GL}(E)$.

1) a) Démontrer que :

$$\phi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow Im(\phi) \subset \ker(\phi)$$

b) En déduire que :

$$\dim(ker(\phi)) \geq \frac{1}{2} \dim(E)$$

2) Sachant que $u$ est un automorphisme de $E$, démontrer que :

a) $E = \ker(\phi_1) \oplus \ker(\phi_2)$

b) Montrer que $\ker(\phi_1) = Im(\phi_1)$ $et$ $\ker(\phi_2) = Im(\phi_2)$

(***Indice*** : On pourra raisonner sur $rg(\phi_1)$ $et$ $rg(\phi_2)$).

c) Démontrer que $u$ est un échangeur.

## Partie C : Cas où $u$ n'est pas un automorphisme

Dans cette partie on suppose que $u$ n'est pas un automorphisme.

On note :

$$\forall k \in \mathbb{N}, F_k = Ker(u^k) \; et \; G_k = Im(u^k)$$

1) a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, F_k \subset F_{k+1}$$

(On dit que la suite d'espaces vectoriels $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion).

b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, G_{k+1} \subset G_k$$

2) a) On pose $A = \{k \in \mathbb{N}, F_k = F_{k+1}\}$. Montrer que $A$ est non vide.

b) On pose $p = \min(A)$. Montrer que $p \geq 1$.

c) Montrer que :

$$\forall k \geq p, F_k = F_p \ et \ G_k = G_p$$

*(**Indice** : On pourra faire une récurrence sur $k$).*

3) a) Montrer que $F_{2p}$ est stable par u (c'est-à-dire que $\forall e \in F_{2p}, u(e) \in F_{2p}$)

b) On pose

$$u_0 : \begin{cases} F_{2p} \to F_{2p} \\ x \mapsto u(x) \end{cases}, \left( c'est - \text{à} - dire \ u_0 = u|_{F_{2p}} \right)$$

On dit que $u_0$ est l'endomorphisme induit par $u$ sur $F_{2p}$. (On peut le faire car $F_{2p}$ stable par $u$).
Montrer que $u_0$ est nilpotent, c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbb{N}, tel \ que \ (u_0)^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

4) a) Montrer que $G_{2p}$ est stable par $u$ et que l'endomorphisme $u_1$ induit par $u$ sur $G_{2p}$ est un automorphisme.

b) Montrer que $\phi_1 \ et \ \phi_2$ commutent avec $u^2$. En déduire que $G_{2p}$ est stable par $\phi_1 \ et \ \phi_2$.

5) a) Montrer que $E = F_{2p} \oplus G_{2p}$.

b) On admet dans cette question que tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est un échangeur. Montrer que $u$ est un échangeur.