Programme de colle n°27
(19 au 23 mai)

Matrices d'une application linéaire

- Matrice d'une application linéaire, d'un vecteur
- Endomorphismes, isomorphismes et matrices de changement de bases.

Probabilité

- Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$
- Probabilité conditionnelle
- Evènements indépendants

Démo de cours

Propriété (Formule des probabilités totales) I.c.1: Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition de l´univers d´une expérience aléatoire. Soit B un évènement de cette expérience. On a alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Propriété II.a.1 : On a les équivalences suivantes :

$$A \coprod B \Leftrightarrow A \coprod \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \coprod B \Leftrightarrow \bar{A} \coprod \bar{B}$$

Application II.c.3 : on pose :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts}$$

Exercices de cours

_ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée
_ Savoir écrire une application linéaire lorsque l'on connait sa matrice dans une base donnée.
_ Tenter de démontrer que deux matrices sont semblables, écrire la relation qui lie les deux…

Exercice A.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de f.
2) Calculer f^2. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
3) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ puis en déduire une base du noyau et de l'image de f.
4) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application I.a.2 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\mathrm{mat}_{B_c}(\varphi) = M$
b) Déterminer M^{-1}.

Exercices A.1 : Dix paires de chaussures distinctes sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard quatre chaussures. Quelle est la probabilité :
1) D'obtenir deux paires de chaussures ?
2) D'obtenir au moins une paire de chaussure ?
3) D'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Exercices A.2 : Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :
1) On tire deux boules simultanément.
2) On tire une boule, on ne la remet pas, puis on en tire une autre.
3) On tire une boule, on la remet, puis on en tire une autre.

Exercice B.3 : Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- S'il fonctionne à la date n-1 $(n \in \mathbb{N}^*)$, il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n.
- S'il passe à la date n-1 $(n \in \mathbb{N}^*)$, il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n.

Où (a, b) est un couple de réels de $[0,1]$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'évènement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.

1) Déterminer p_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice B.4 : Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.
1) Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2) Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

Exercice B.5 : On dispose de N+1 urnes, numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et N-k boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.
1) Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?
2) Calculer la suite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.