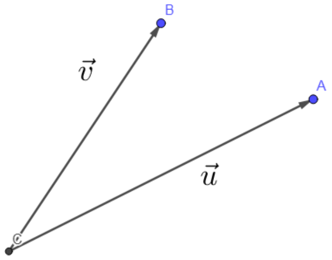
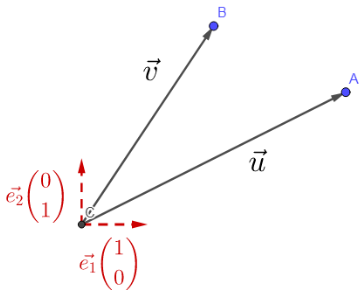
Activité 27.A.1
Introduction au déterminant et lien avec les aires et volumes en dimension 2 et 3.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $\mathcal{P}(\vec{u},\vec{v})$ le parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
1) Tracer le parallélogramme $\mathcal{P}(\vec{u},\vec{v})$ dans la figure suivante :



A présent on pose $\mathcal{A}$ l'application qui à un couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ de $\mathbb{R}^2$, associe l'aire du parallélogramme $\mathcal{P}(\vec{u},\vec{v})$. On note $\mathcal{A}\big((\vec{u},\vec{v})\big)$ l'aire du parallélogramme.
2) Expliquez pourquoi $\mathcal{A}\big((\vec{u},\vec{v})\big)$ n'est pas bien définie. Que manque-t-il pour bien définir $\mathcal{A}\big((\vec{u},\vec{v})\big)$?
3) A présent on pose $\mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((\vec{u},\vec{v})\big)$ l'aire du parallélogramme $\mathcal{P}(\vec{u},\vec{v})$ dans la base canonique.



Compléter égalités suivantes :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((\vec{e_1},\vec{e_2})\big) = \ldots\ldots \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((\vec{u},\vec{u})\big) = \ldots\ldots \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\left(\left(\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right)\right) = \ldots\ldots$$

4) Compléter égalités suivantes à l'aide de $\mathcal{A}\big((\vec{u},\vec{v})\big)$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((\vec{u},3\vec{v})\big) = \ldots\ldots \quad \mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((5\vec{u},\vec{v})\big) = \ldots\ldots \quad \mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((\vec{u},\vec{v}+\vec{w})\big) = \ldots\ldots \quad \mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((\vec{u}+\vec{a},\vec{v})\big) = \ldots\ldots$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\big((\vec{u}+\vec{a},\vec{v}+\vec{w})\big) = \ldots\ldots$$

5) Calculer :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}_c}\left(\left(\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)\right)$$