Chapitre 28 : Variable aléatoire sur un univers fini
Partie A : Généralités

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

I) Du déjà vu

a) Un peu de vocabulaire

Définition : On appelle variable aléatoire sur Ω toute application $X: \Omega \to E$ (Où E est un ensemble quelconque).
Si $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Notation : L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$. C'est un sous-ensemble fini de E car Ω est fini.

Exemple I.a.1 : On lance deux dés équilibrés et discernables (un bleu et un blanc par exemple). On pose alors $(⟦1;6⟧^2, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la loi uniforme. On pose :

$$X: \begin{cases} ⟦1;6⟧^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$$

Déterminer $X(\Omega)$.

Notation : Soit $X: \Omega \to E$ une variable aléatoire. Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'évènement :

$$\{X \in A\} = (X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\}$$

Si $x \in E$, on note $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'évènement

$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\}$$

Remarque : Si $E = \mathbb{R}$ on peut définir : $\{X \leq x\} = (X \leq x) = X^{-1}(]-\infty; x]) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}$;
On a bien sûr de même $\{X < x\}$.

Exemple I.a.2 : On utilise le même exemple que l'exemple **I.a.1**.
a) Déterminer $\{X = 6\}$.
b) On pose : $A = \{Obtenir\ un\ multiple\ de\ 4\}$. Déterminer $\{X \in A\}$.
c) Déterminer $\{X \leq 5\}$

b) Propriétés

Propriété I.b.1 : Soit $X: \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω. On pose :

$$\mathbb{P}_X: \begin{cases} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \to [0;1] \\ A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

Alors $\mathbb{P}_X$ est une loi de probabilité sur $X(\Omega)$. On l'appelle la loi de X.

Propriété I.b.2 : Soit $X: \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω.
(1) La famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènement. En particulier :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) = 1$$

(2) On a donc :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(\{X = x\})$$

Définition : Soit X une variable aléatoire. La loi de X est déterminé de manière unique par la donnée des $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Plus précisément, on a pour tout $A \subset X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple I.b.4 : On lance deux dés équilibrés et discernables (un bleu et un blanc par exemple). On pose alors $(\llbracket 1; 6 \rrbracket^2, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la loi uniforme. On pose :

$$\mathrm{X}: \begin{cases} \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \to \mathbb{R} \\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \mathrm{x} + \mathrm{y} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X.

c) Fonction d'une variable aléatoire

Définition : Soit $\mathrm{X}: \Omega \to \mathrm{E}$ est une variable aléatoire et $f: E \to F$. Alors $f o X$ définit une variable aléatoire notée $f(X)$.

Propriété I.c.1 : Soit X une variable aléatoire sur Ω et $f: E \to F$. On pose $Y = f(X)$. La loi de Y est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple I.c.2 : On lance deux dés équilibrés et discernables (un bleu et un blanc par exemple). On pose alors $(\llbracket 1; 6 \rrbracket^2, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la loi uniforme. On pose :

$$X: \begin{cases} \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y \end{cases}$$

Déterminer la loi de X puis de X^2.

II) Lois usuelles

a) La loi uniforme

Définition : Soit X une variable aléatoire. Soit $\mathrm{F} = \{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$ un ensemble fini de $\mathbb{R}$ de cardinal n. On dit que X suit la loi uniforme sur F, et on note $\mathrm{X} \sim \mathcal{U}(\mathrm{F})$ lorsque :

$$X(\Omega) = F \text{ et } \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

Exemple II.a.1 : Déterminer une variable aléatoire qui suit une loi uniforme et une autre non !

b) Loi de Bernoulli

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeur sur Ω. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{p} \in [0; 1]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}, \mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Exemple II.b.1 : Déterminer une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli et une autre qui prend deux valeurs possibles mais qui ne suit pas une loi de Bernoulli !

Application II.b.2 : Soit X une variable aléatoire tel que :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3} = 1 - \mathbb{P}(X = -1)$$

Ecrire une variable aléatoire Y à partir de X tel que $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

c) Loi binomiale

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeur sur Ω. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in [0;1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ si :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!], \forall k \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque : On démontrera plus tard dans le cours que si l'on a n lois de Bernoulli $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes et de même paramètre p, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une binomiale de paramètres n et p.

Exemple II.c.1 : Déterminer une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12\,;0{,}4)$.

Exemple II.c.2 : On lance une pièce de monnaie équilibrée 100 fois de suite. On pose X_{100} la variable aléatoire qui compte le nombre de pile. Déterminer $\mathbb{P}(45 \leq X_{100} \leq 55)$.

Application II.c.3 : Un mouton, placé à l'instant initiale à $O(0)$ se déplace 5 fois sur l'axe des entiers. A chaque déplacement, il avance de 1 avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et recule de 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On pose Y_5 la variable aléatoire qui après 5 déplacements, associe la position du mouton sur l'axe des entiers.
Déterminer la loi de Y.