

Chapitre 28 : Variables aléatoires

Partie B : Couple de variables aléatoires

Dans toute la suite, $X: \Omega \rightarrow E$ et $Y: \Omega \rightarrow F$ désignent des variables aléatoires, et on notera $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$.

I) Avec deux variables aléatoires

a) Une définition classique

Définition : On appelle couple des variables aléatoires X et Y , et on note $Z = (X, Y)$, l'application :

$$Z: \begin{cases} \Omega \rightarrow E \times F \\ \omega \mapsto Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

On appelle $X: \Omega \rightarrow E$ et $Y: \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires. On appelle **loi conjointe** de X et Y la loi du couple (X, Y) :

$$\begin{cases} \mathbb{P}((X, Y)(\Omega)) \rightarrow [0; 1] \\ A \mapsto \mathbb{P}((X, Y) \in A) \end{cases}$$

Exemple I.a.1 : On lance simultanément deux dés 6 équilibrés. On pose X le plus grand des deux chiffres et Y la somme des deux. Déterminer la loi conjointe de X et Y .

Exemple I.a.2 : Une urne contient 3 boules blanches, 4 vertes et 5 rouges. On tire au hasard 3 boules dans l'urne. Soient B le nombre de boules blanches tirées et R le nombre de rouge. Déterminer la loi conjointe de B et R .

Notation : On note les évènements :

$$\{X = x\} \cap \{Y = y\} = \{X = x, Y = y\} = \{(X, Y) = (x, y)\}$$

b) Système complet

Propriété I.b.1 : Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire. La famille $(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$ est un système complet d'évènements de Ω . En particulier :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket} \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = 1$$

Exemple I.b.2 : Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement et avec remise au hasard deux boules X_1 et X_2 . On pose $X = X_1$ et $Y = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la **loi conjointe** de X et Y .

c) Lois marginales

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoire. On appelle lois marginales du couple (X, Y) les lois de X et de Y .

Propriété I.c.1 : Soient (X, Y) un couple de variables aléatoire. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i = \mathbb{P}(X = x_i) &= \sum_{k=1}^p \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_k)) = \sum_{k=1}^p p_{i,k} \\ \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, q_i = \mathbb{P}(Y = y_i) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((X = x_k) \cap (Y = y_i)) = \sum_{k=1}^n p_{k,i} \end{aligned}$$

Exemple I.c.2 : On lance deux dés 6 équilibrés, on note X le plus grand des résultats et Y le plus petit. Déterminer la loi conjointe de X et Y , puis les lois marginales de X et Y .

Exemple I.c.3 : Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement et avec remise au hasard deux boules X_1 et X_2 . On pose $X = X_1$ et $Y = \min(X_1, X_2)$. Déterminer les lois marginales de X et Y .

d) Probabilités conditionnelles

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ l'application :

$$\begin{cases} Y(\omega) \rightarrow [0,1] \\ y \mapsto \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y) = \frac{\mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = x\})}{\mathbb{P}(X = x)} \end{cases}$$

Remarque : On définit de même la loi conditionnelle de X sachant que $\{Y = y\}$ si $y \in Y(\Omega)$ est tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$.

Propriété I.d.1 : Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire. On suppose que, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$. Alors, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = x\}) = \mathbb{P}(Y = y|X = x) \times \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x|Y = y) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})$$

$$\mathbb{P}(\{Y = y\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y|X = x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple I.d.1 : On lance deux dés 6 équilibrés, on note X le plus grand des résultats et Y le plus petit. Déterminer la loi de Y sachant $\{X = 3\}$, notée $\mathbb{P}_{\{X=3\}}$.

II) Indépendances de variables aléatoires

a) Indépendance de deux variables

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{X = x\}) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(\{Y = y\})$$

Exemple II.a.1 : On lance deux dés équilibrés. On note X le plus grand des deux et Y vaut 1 si la somme est paire et 0 si elle est impaire. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exemple II.a.2 : On lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu. On note X le résultat du dé rouge et Y le résultat du dé bleu. Montrer que X et Y sont indépendants.

Propriété II.a.3 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, on a :

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Application II.a.4 : Un point $M(x, y)$ part à l'instant $t = 0$ au point $O(0,0)$. Toutes les secondes, il se déplace de 1 ou de 0 en abscisse, et de 1 ou de 0 en ordonnées, de façons équiprobables et indépendantes. Déterminer la probabilité qu'au bout de 5 secondes il soit au point de coordonnées $A(3,2)$.

b) Une belle équivalence

Propriété II.b.1 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre :

- (1) X et Y sont indépendantes.
- (2) La loi conjointe de X et Y est le produit de leurs lois marginales.
- (3) Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant que $\{X = x\}$ est égale à la loi de Y .
- (4) Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant que $\{Y = y\}$ est égale à la loi de X .

Remarque : On peut ainsi démontrer l'indépendance de deux variables aléatoires de 3 façons.

c) Image de variables aléatoires indépendantes

Propriété II.c.1 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $f: X(\Omega) \rightarrow E$ et $g: Y(\Omega) \rightarrow F$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Application II.c.2 : Un point $M(x, y)$ part à l'instant $t = 0$ au point $O(0, 0)$. Toutes les secondes, il se déplace de 1 ou de -1 en abscisse, et de 1 ou de -1 en ordonnées, de façon équiprobable et indépendante. Déterminer la probabilité qu'au bout de 5 secondes il soit au point de coordonnées $A(3, 3)$.

III) Indépendance mutuelle ou deux à deux

a) Indépendance mutuelle

Définition : Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes), si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i = x_i\})$$

Exemple III.a.1 : On tire dans une urne (contenant p boules numérotées de 1 à p) successivement et avec remise n fois. Soit X_i le résultat du i -ième tirage.

Alors les $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants.

Propriété III.a.2 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes.

- (1) Pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$,

$$\mathbb{P}((X_1 \in A_1) \cap \dots \cap (X_n \in A_n)) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$
- (2) Toute sous-famille de $X_1, \dots, X_n$ est indépendante.
- (3) Pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, les événements $\{X_i \in A_i\}$ sont mutuellement indépendants. En particulier, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ sont mutuellement indépendants.

b) Indépendance deux à deux

Propriété III.b.1 : Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes.

ATTENTION : La réciproque est fausse !!

Contre-exemple III.b.2 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$$

On pose $Z = XY$. Montrer que X, Y et Z sont indépendants deux à deux sans être mutuellement indépendants.

c) Application à la loi binomiale

Propriété III.c.1 : Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .