Chapitre 28 : Variables aléatoires
Partie C : Espérance d'une variable aléatoire réelle, variance et covariance

Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, oû l'univers Ω est finie.

I) Espérance

a) Une moyenne probabiliste

Définition : On appelle espérance de X, note $\mathbb{E}(X)$, le réel :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$
$\mathbb{E}(X)$ est donc la moyenne, pondérée par leur probabilité, des valeurs prises par X.

Exemple I.a.1 : on lance deux dés 6 parfaitement équilibrés. Soit S la somme des valeurs prises par les deux dés. Déterminer sa probabilité.

Exemple I.a.2 : Soient $p \in [0; 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. Déterminer l'espérance de X.

Remarque : L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi. Ainsi deux variables aléatoires qui ont même loi ont même espérance. Attention la réciproque est fausse.

Contre-exemple I.a.3 : Déterminer deux variables aléatoires X et Y qui ont même espérance sans avoir même loi.

Propriété I.a.4 : On a :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$$

Application I.a.5 : Soit A une partie de Ω et $X = 1_A$. Déterminer l'espérance de X.

b) Quelques propriétés de l'espérance

Propriété I.b.1 : L'espérance est linéaire et croissante :
1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (X, Y)$ var, $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
2) $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

Application I.b.2 : Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0; 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ on a :
$$\mathbb{E}(X) = n \times p$$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire réelle est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Application I.b.3 : Soit X une variable aléatoire réelle, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

c) Fonction de transfert

Propriété I.c.1 (Théorème de transfert) : Soit X une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors :
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x)$$

Application I.c.2 : On lance deux dés 6 équilibrés. Soit $X = max(Dé\ 1; Dé2)$. Déterminer l'espérance de X^2.

d) Espérance et variables aléatoires indépendantes

Propriété I.d.1 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On a alors :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

ATTENTION : La réciproque est fausse !!

Contre-exemple I.d.2 : Soient U et V deux urnes, que l'on remplit aléatoirement avec deux boules. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules dans U, Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'urnes vides.

Propriété I.d.3 : Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes. On a alors :

$$\mathbb{E}(X_1 \times \dots . \times X_n) = \mathbb{E}(X_1) \times \dots \times \mathbb{E}(X_n)$$

e) Espérances usuelles

Exercice I.e.1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$. Déterminer l'espérance de X.

Exercice I.e.2 : Soit $p \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance d'une $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n;p)$.

f) Inégalité de Markov

Propriété *I.f.1* (Inégalité de Markov) : Soit $a \in]0;+\infty[$ et X une variable aléatoire positive. On a alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Application I.f.2 : Une compagnie aérienne utilise un avion qui peut transporter au maximum 400 passagers. La probabilité pour qu'un passager, ayant réservé pour un vol donné, ne se présente pas à l'embarquement est de 0,08. La compagnie décide de vendre 420 billets en se disant qu'au vu des probabilités, ils auront moins de 400 personnes de toute façon.
Majorez la probabilité que la compagnie fasse du surbooking.

II) Variance

a) Une espérance d'une espérance

Définition : Soit X une v.a.r. On appelle variance de X et on note $\mathbb{V}(X)$ le réel défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$$

On appelle l'écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque : la variance est l'espérance du carré de la distance entre les valeurs de X et l'espérance de X. La variance ou l'écart type sont donc des mesures de la dispersion de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$. Plus ces quantités sont petites, plus les valeurs de X sont « concentrées » autour de l'espérance.

Propriété II.a.1 : Soit X une v.a.r. On a :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple II.a.2 : on lance deux dés 6. Soit S la somme des deux dés. Déterminer sa variance et son écart type.

Propriété II.a.3 : Soit X una variable aléatoire réelle. On a :
(1) $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2$ (Formule de Koenig Huygens).
(2) $\forall(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{V}(\mathrm{aX} + \mathrm{b}) = \mathrm{a}^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$

b) Variances usuelles

Exercice I.b.1 : Soit $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; \mathrm{n}]\!])$. Déterminer la variance de X.

Exercice I.b.2 : Soit $\mathrm{p} \in [0; 1]$ et $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la variance d'une $\mathcal{B}(\mathrm{p})$ et $\mathcal{B}(\mathrm{n}; \mathrm{p})$.

c) Inégalité de Bienaymé-Tchevbychev

Propriété II.c.1 (Inégalité de Bienaymé-Tchevbychev) : Soit X une variable aléatoire et $\epsilon > 0$. Alors :
$$\mathbb{P}(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\epsilon^2}$$

Remarque : L' inégalité de Bienaymé-Tchevbychev vise à montrer que la variable aléatoire X prend des valeurs proches de $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ avec une grande probabilité, mais elle donne, en général, une majoration grossière.

Application II.c.2 : Une compagnie aérienne utilise un avion qui peut transporter au maximum 400 passagers. La probabilité pour qu'un passager, ayant réservé pour un vol donné, ne se présente pas à l'embarquement est de 0,08. Déterminer le nombre de billets que la compagnie peut vendre pour que la probabilité que l'avion de soit pas surbooké soit inférieur ou égale à 0,05.

III) Covariance

a) Définition

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. La covariance de X et Y, noté $Cov(X, Y)$ est le réel :
$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
Si $Cov(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont décorrélées.

Exemple III.a.1 : On lance deux dés 6 équilibrés, on note X le plus grand des résultats et Y le plus petit. Calculer $Cov(X, Y)$.

b) Propriétés

Propriété III.b.1 : La Cov est bilinéaire, symétrique. De plus on a :
$$Cov(X, X) = \mathbb{V}(X)$$

Propriété III.b.2 : Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$.

Application III.b.3 : Retrouver la variance d'une loi binomiale à l'aide de la covariance.

Propriété III.b.4 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires sur un même espace probabilisé. On a alors :
$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cos(X_i, Xj)$$

Application III.b.5 : On dispose de n urnes et de n boules. Chaque boule est posée aléatoirement dans une urne. On pose X le nombre d'urnes vides. Déterminez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.