Fiche d'exercices 28 : Variables aléatoires

Partie A : Lois des variables aléatoires

Exercice A.1 : Soit $N \geq 2$. On lance N fois une pièce de monnaie équilibrée. On pose X la variable aléatoire donnant le numéro du jet pour lequel on obtient pile pour la première fois, et renvoie 0 si l'on obtient jamais pile.
Déterminer la loi de X.

Exercice A.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice A.3 : n amis vont au cinéma et choisissent entre 3 films F_1, F_2 et F_3. Les choix sont indépendants et équilibrés entre les films. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note X_i le nombre de personnes choisissant le film F_i.
a) Déterminer la loi de X_i, pour $i \in \{1,2,3\}$.
b) Soit Y le nombre de films ayant reçu au moins un choix. Déterminer la loi de Y.

Exercice A.4 : Une urne contient deux boules blanches et sept boules noires. On tire successivement et avec remise 6 fois dans l'urne. On pose B_6 la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues. Déterminer la probabilité de $\{B_6\} = 4$.

Exercice A.5 : On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des évènements. On pose X le nombre d'ampoules défectueuses.
1) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$
2) Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$
3) Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$

Partie B : Couple de variables aléatoires

Exercice B.1 : Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X \backslash Y$	a_1	a_2	a_3
b_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
b_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

De plus on a $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ dès que $i \neq j$.
1) Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice B.2 : On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si on tire un roi} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ; Y = \begin{cases} 1 \text{ si on tire une dame} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ; \quad Z = \begin{cases} 1 \text{ si on tire un coeur} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples (X, Y) et (X, Z).
b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice B.3 : Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1; 1\}$ prenant toutes les deux la valeur 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$.
Soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$X = U, Y = \begin{cases} V \text{ si } U = 1 \\ -V \text{ si } U = -1 \end{cases}$$

a) Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
b) Les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?
Exercice B.4 : Soient $p \in]0;1[$, $(n, m) \in \mathbb{N}^*$. On se donne X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement.
a) Montrer que :

$$\forall k \in [\![0; m+n]\!], \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

b) En déduire que $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$

Exercice B.5 : N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n, avec $n \geq 2$. Soit X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i.
a) Déterminer la loi de X_i.
b) Les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont-elles indépendantes ?

Partie C : Espérance, variance et covariance

Exercice C.1 : L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi les trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.
1) Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
a) Les trois sujets tirés.
b) Exactement deux sujets sur les trois sujets.
c) Aucun des trois sujets.
2) Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice C.2 : On lance 10 fois de suite un dé 6 parfait.
a) On appelle X le nombre de fois qu'on a obtenu une face portant un numéro pair. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance.
b) On appelle Y la somme de tous les points obtenus. Trouver l'espérance de Y.
c) On appelle Z le nombre de faces différentes qui sont apparues. Calculer l'espérance de Z. Dans le cas où on lance le dé 3 fois (au lieu de 10), écrire explicitement la loi de probabilité de Z, et retrouver directement la valeur de $E(Z)$.

Exercice C.3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit r tel que $0 \leq r \leq n$. Un placard contient n paires de chaussures. On tire, au hasard, 2r chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.
Les paires du placard sont numérotées de 1 à n. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la $i-$ième paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.
a) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi et l'espérance de X_i.
b) Déterminer l'espérance de X.

Exercice C.4 : Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec la probabilité $p \in]0,1[$, ou par $\beta \in]0,1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n.
a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
b) On suppose $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Quelle doit être la valeur de p pour que $\mathbb{E}(S_n) = 1$?

c) On suppose $\beta = 1 - h$ et $\alpha = 1 + h$ pour $h \in]0,1[$. Quelle doit être la valeur de p pour que $\mathbb{E}(S_n) = 1$? Que vaut alors $\mathbb{V}(S_n)$?

Exercice C.5 : On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.
a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_k) + 1$.
c) Déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $k \to +\infty$.

Exercice C.6 : Soit $N \geq 2$. Une urne contient $N + 1$ boules numérotées de 0 à N. On tire avec remise une boule. On considère les variables aléatoires suivantes : $X_1 = 1$, et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.
a) Déterminer la loi de X_i.
b) Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?

Exercice C.7 : Soient $(a, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considere $N = a \times n$ clients qui s'approvisionnent chez n fournisseurs. Chaque client choisit un fournisseur au hasard. Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on note Xi le nombre de clients du fournisseur i et Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.
1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Xi.
2. Que vaut X1 +· · ·+ Xn ? En déduire E(XiXj) et Cov(Xi,Xj) pour i , j.
3. Soit βi la variable aléatoire indicatrice de l'évènement : ≪ le fournisseur i n'a pas de client ≫. Exprimer Y en fonction des βi.
Déterminer E(Y).
4. Calculer Cov(βi,βj).
5. Déterminer la variance de Y.

Exercice C8 : Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de *n* pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de *n* tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p.
1) Quelle est la loi de X_n? Sa moyenne? Sa variance?
2) Démontrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} - p \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

3) En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice C9 : 1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n,p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

2) **Application** : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100?