

**Colle n°28**  
**(Du 2 au 6 juin 2025)**

**Probabilité**

- Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$
- Probabilité conditionnelle
- Evènements indépendants

**Déterminant**

- Déterminant d'une famille de vecteurs
- Déterminant d'une matrice carrée
- Déterminant d'un endomorphisme

**Variables aléatoires**

- Définition
- Lois uniforme, binomiale, Bernoulli
- Lois conjointe et marginales d'un couple  $X$  et  $Y$

**Démo de cours**

**Propriété (Formule des probabilités totales) I.c.1:** Soit  $A_1, \dots, A_n$  une partition de l'univers d'une expérience aléatoire. Soit  $B$  un évènement de cette expérience. On a alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

**Propriété II.a.1 :** On a les équivalences suivantes :

$$A \cup B \Leftrightarrow A \cup \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \cup B \Leftrightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$$

**Propriété I.b.1 (Opérations sur le déterminant) :** On a :

1) Si  $(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F}$  contient  $O_E$  alors son déterminant est nul.

$$O_E \in \mathcal{F} \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$

2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = -\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, f_n))$$

3) Les transvections ne changent pas le déterminant :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i + \lambda \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = \det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) \quad (i \neq j)$$

**Exercices types**

**Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde) :** Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$$

**Exercice 7 :** Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$ . Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0$$

**Application II.c.3 :** Calculer le déterminant suivant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$