

Fiche exercices 29 : Déterminants

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

$$a = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+7 & 7x+9 \end{vmatrix},$$

$$e = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-a-b \end{vmatrix}$$

Calcul de $a = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Méthode 1 : Par la méthode de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 1 \times 1 + (-1) \times (-3) \times 2 + 2 \times 1 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 - 3 \times (-3) \times 2 - (-1) \times 1 \times 1 = 28$$

Méthode 2 : A l'aide du pivot de Gauss

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 28$$

Méthode 3 : Par la méthode des mineurs :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times 7 - (-5) + 2 \times 1 = 28$$

Calcul de $b = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Méthode 1 : Par la méthode de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-1) \times 1 + (-4) \times 5 \times 1 + 1 \times 2 \times (-1) - 1 \times (-1) \times 1 - 3 \times 5 \times (-1) - (-4) \times 2 \times 1$$

$$= -1$$

Méthode 2 : A l'aide du pivot de Gauss

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Méthode 3 : Par la méthode des mineurs :

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 4 + 6 - 19 = -1$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc + bac = 2abc$$

$$d = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+7 & 7x+9 \end{vmatrix}$$

Ici on peut voir que :

$$L_1 + L_2 = L_3$$

On en déduit donc que :

$$d = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+7 & 7x+9 \end{vmatrix} = 0$$

$$e = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} e & \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \cos(a)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \cos(2a)L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 0 & \cos(2a) - \cos^2(a) & \cos(3a) - \cos(a)\cos(2a) \\ 0 & \cos(3a) - \cos(a)\cos(2a) & \cos(4a) - \cos^2(2a) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 0 & -\sin^2(a) & -\sin(a)\sin(2a) \\ 0 & -\sin(a)\sin(2a) & -\sin^2(2a) \end{vmatrix} \\ &= (\sin(a)\sin(2a))^2 - (\sin(a)\sin(2a))^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} f &= \begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-a-b \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ a+b+c & -b-c-a & 0 \\ a+b+c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Dvt} \setminus L_2}{=} (a+b+c)^2 ((-1)(-2b) + (-1)(-a+b+c-2c)) \\ &= (a+b+c)^2 (a+b+c) \\ &= (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Calculer le déterminant de $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = \min(i,j)$, $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 1 \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

D'une façon générale on peut conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \det(A_n) = 1$$

Démontrons-le.

On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

On a :

$$L_1 = (1 \quad \dots \quad 1), L_2 = (1, 2, \dots, 2), L_3 = (1, 2, 3, \dots, 3)$$

D'une façon générale on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, L_i = (a_{i,1}; a_{i,2}; \dots; a_{i,n}) \text{ avec } \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ i & \text{sinon} \end{cases}$$

Etape 1 : On effectue les opérations suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket, L_i \leftarrow L_i - L_1$$

On a alors :

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & \ddots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 3 & \ddots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & n-1 \end{vmatrix}$$

Etape 2 : On effectue les opérations suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 3; n \rrbracket, L_i \leftarrow L_i - L_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & \ddots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 3 & \ddots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & \ddots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & n-2 \end{vmatrix}$$

En réitérant le processus on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4 & \ddots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Exercice 3 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - (-8) \times 11 = 28 + 88 = 116$$

Méthode 1 : Avec Sarrus car c'est une 3×3

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{4 \times 21}_{84} + 0 + \underbrace{6 \times 6 \times 3}_{108} - \underbrace{(6 \times 5 \times 4)}_{120} - \underbrace{(15 \times 6)}_{90} = -18$$

Méthode 2 : Avec la matrice échelonnée

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}]{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 12 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -18$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28 + 36 - 40 - 30 = -6$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 2 + 12 - 5 = 14$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 4 \times 4 = 96 \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 \times 1 \times (-2) \times 4 = -8$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

Exercice 4 : 1) Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points à coefficients entiers est un nombre entier.

1) On sait que :

$$\mathcal{A}_{\vec{u}, \vec{v}} = |\det(\vec{u}, \vec{v})| = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = |2 \times 4 - 1 \times 3| = 5$$

2) De même on a :

$$\mathcal{V}_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{dvt} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Ou bien par Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 + 6 - 3 = 4$$

3) On sait que :

$$\mathcal{V}_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}} = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right| = |x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1| \in \mathbb{N}$$

Exercice 5 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \stackrel{\text{dvt}/C_1}{=} a \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} c \times \begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} + b \times \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= a(a^2 - bc) - c(ab - c^2) + b(b^2 - ac)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{dvt}/L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{dvt} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{dvt}/L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{dvt} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{dvt} \\ C_1}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{\text{dvt} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{=} -8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{dvt} \\ L_2}}{=} 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -16$$

Exercice 6 : Calculer $\det(A_n)$ avec $A_n = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$

On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & (A_{n-1}) & \\ n-1 & & & \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite les opérations suivantes :

$$\forall i \in [2; n], L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$$

On a alors :

$$\Delta_n = \det(A_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ensuite on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 3; n \rrbracket, L_i &\leftarrow L_i - L_{i-1} \\ \Delta_n = \det(A_n) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2} \end{aligned}$$

Exercice 7 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & \dots & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Pour démontrer que le déterminant est différent de 0, on va démontrer que la famille formée des colonnes de la matrice n'est pas libre !

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & \dots & \cos(a_n + a_n) \end{pmatrix}$$

On pose pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, C_i la colonne de A . On a alors :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, C_i &= \begin{pmatrix} \cos(a_1 + a_i) \\ \cos(a_2 + a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n + a_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a_1) \cos(a_i) - \sin(a_1) \sin(a_i) \\ \cos(a_2) \cos(a_i) - \sin(a_2) \sin(a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n) \cos(a_i) - \sin(a_n) \sin(a_i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a_1) \cos(a_i) \\ \cos(a_2) \cos(a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n) \cos(a_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(a_1) \sin(a_i) \\ \sin(a_2) \sin(a_i) \\ \vdots \\ \sin(a_n) \sin(a_i) \end{pmatrix} \\ &= \cos(a_i) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(a_1) \\ \cos(a_2) \\ \vdots \\ \cos(a_n) \end{pmatrix}}_{=C} - \sin(a_i) \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(a_1) \\ \sin(a_2) \\ \vdots \\ \sin(a_n) \end{pmatrix}}_{=S} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, C_i = \begin{pmatrix} \cos(a_1 + a_i) \\ \cos(a_2 + a_i) \\ \vdots \\ \cos(a_n + a_i) \end{pmatrix} = \cos(a_i) C - \sin(a_i) S$$

On ne déduit donc que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, C_i \in \text{vect}(C, S)$$

Or on sait que :

$$\dim(\text{vect}(C, S)) \leq 2$$

On en déduit que :

$$\text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_n) \leq 2$$

On en déduit donc que :

$\forall n \geq 3, (C_1, \dots, C_n)$ n'est pas libre ! Donc :

$$\det_{B_c}(C_1, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 8 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, et $M_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = \det \left(aI_{2n} + b \left(\sum_{k=1}^{2n} E_{2n+1-k,k} \right) \right)$$

Montrer que $\det(M_n) = (a^2 - b^2)^n$

$$\begin{aligned} \det(M_n) &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_{2n}}{=} \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & b & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & \dots & 0 & b-a \\ 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & b & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \\ &= (a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & b & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_{2n}}{=} (a-b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & b & & & \ddots & 0 \\ a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Dvt } C_1}{=} (-1)^{2n+1}(a^2 - b^2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Dvt } L_1}{=} (-1)^{2n+1}(a^2 - b^2)(-1)^{2n-1+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & b & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \\ &= (a^2 - b^2) \times M_{n-1} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = (a^2 - b^2)^{n-1} M_1 = (a^2 - b^2)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n$$

Exercice 9 : On pose :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 2, D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & & (0) \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Déterminer une expression de D_n en fonction de n .

On développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 4, D_n &= \begin{vmatrix} a+b & a & & & (0) \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix} \\ &= (a+b) \times D_{n-1} - b \times \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pour calculer $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}$, on développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a+b & a & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a+b & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix} = a \times D_{n-2}$$

On a donc :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 4, D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \times D_{n-2}$$

Illustration sur une matrice 4×4 :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & 0 \\ b & a+b & a & 0 \\ 0 & b & a+b & a \\ 0 & 0 & b & a+b \end{vmatrix} &= (a+b) \times \begin{vmatrix} a+b & a & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a+b & a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix} \\ &= (a+b) \times D_3 - b \times a \times \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} \\ &= (a+b)D_3 - ab \times D_2 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 4, D_n &= (a+b)D_{n-1} - ab \times D_{n-2} \\ \Leftrightarrow D_n - (a+b)D_{n-1} + abD_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0$$

On a alors :

$$\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

On a alors :

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = a \\ \text{ou} \\ r = b \end{cases}$$

On a donc :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 1, D_n = A \times a^{n-1} + B \times b^{n-1}$$

Or on sait que :

$$D_1 = |a + b| = a + b, D_2 = \begin{vmatrix} a + b & a \\ b & a + b \end{vmatrix} = (a + b)^2 - ab$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} A + B = a + b \\ aA + bB = a^2 + b^2 + ab \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} aA + aB = a^2 + ab \\ aA + bB = a^2 + b^2 + ab \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} A + B = a + b \\ (a - b)B = -b^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} B = -\frac{b^2}{a - b} \text{ si } a \neq b \\ A = \frac{a^2}{a - b} \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, D_n &= \frac{a^2}{a - b} \times a^{n-1} - \frac{b^2}{a - b} \times b^{n-1} \\ &= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \\ &= \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \end{aligned}$$

La formule reste vraie pour $a = b$.

On peut vérifier pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a + b & a & 0 \\ b & a + b & a \\ 0 & b & a + b \end{vmatrix} = (a + b) \times \begin{vmatrix} a + b & a \\ b & a + b \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & a + b \end{vmatrix} \\ &= (a + b) \times ((a + b)^2 - ab) - ab(a + b) \\ &= (a + b)^3 - a^2b - ab^2 - a^2b - ab^2 \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Pour $n = 4$:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a + b & a & 0 & 0 \\ b & a + b & a & 0 \\ 0 & b & a + b & a \\ 0 & 0 & b & a + b \end{vmatrix} = (a + b) \times \begin{vmatrix} a + b & a & 0 \\ b & a + b & a \\ 0 & b & a + b \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a + b & a \\ 0 & b & a + b \end{vmatrix} \\ &= (a + b) \times D_3 - b \times a \times \begin{vmatrix} a + b & a \\ b & a + b \end{vmatrix} \\ &= (a + b)D_3 - ab \times D_2 \\ &= (a + b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) - ab(a^2 + b^2 + ab) \\ &= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Le résultat se vérifie pour $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice 10 : Soient $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix} ; \quad B_n = \begin{vmatrix} 1 + x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1 + x^2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & x & 1 + x^2 \end{vmatrix}$$

a) En développant par rapport à la première colonne on obtient :

$$A_n = 2 \cos(\theta) A_{n-1} - A_{n-2}$$

On résout donc :

$$r^2 - 2 \cos(\theta) r + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = e^{i\theta} \\ \text{ou} \\ r = e^{-i\theta} \end{cases}$$

On doit donc distinguer deux cas :

1^{er} cas : $\theta \equiv 0[2\pi]$

On a :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A_n = (\lambda n + \mu)$$

Or on a :

$$A_2 = 3 \text{ et } A_3 = 4 \Rightarrow \textcolor{red}{x}$$

2^{ième} cas : $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

On a alors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A_n = \lambda e^{ni\theta} + \mu e^{-ni\theta}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu = \bar{\lambda}$$

On en déduit donc que :

$$\exists(C, D) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A_n = C \cos(n\theta) + D \sin(n\theta)$$

De plus on a :

$$A_2 = 4 \cos^2(\theta) - 1 = C \cos(2\theta) + D \sin(2\theta)$$

De même on a :

$$A_3 =$$

Exercice 11 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & & \ddots & a & 1 \\ n-1 & \dots & & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1) Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} .

2) Démontrer que :

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

1) On a :

$$\Delta_n = \left| \begin{array}{cccccc} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & & 0 & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & \ddots & a & 1 \\ \hline n-1 & \dots & & 2 & 1 & a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{n lignes} \\ \text{n colonnes} \end{array}$$

On développe par rapport à la colonne C_1 :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 2 \\ 0 & & & \ddots & a & 1 \\ n-1 & \dots & & 2 & 1 & a \end{vmatrix} \\
= (-1)^2 a \times \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-2 \\ 0 & a & & 0 & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 2 \\ & & & \ddots & a & 1 \\ n-2 & \dots & & 2 & 1 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \times (n-1) \times \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & n-1 \\ a & 0 & & \vdots \\ (0) & \ddots & & 2 \\ 0 & \dots & & a & 1 \end{vmatrix} \\
= a \times \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} \times (n-1) \times (-1)^{n-1+1} \times (n-1) \times \begin{vmatrix} a & (0) \\ (0) & a \end{vmatrix} \\
= a \times \Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \geq 3, \Delta_n = a \Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}}$$

2) On le démontre par récurrence.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \mathcal{P}(n) : \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

Initialisation : $n = 2$. On a :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

De plus :

$$a^2 - a^{2-2} \sum_{i=1}^{2-1} i^2 = a^2 - 1$$

Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On suppose que :

$$\Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= a \times \Delta_n - n^2 a^{n-1} \\ &= a \times \left(a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) - n^2 a^{n-1} \\ &= a^{n+1} - a^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 \right) \\ &= a^{n+1} - a^{n-1} \sum_{i=1}^n i^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Exercice 11 (Déterminant de Vandermonde) : Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$$

On pose $V(t_1, \dots, t_n)$ le déterminant recherché.

1^{er} cas : $\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $t_i = t_j$

On a alors deux lignes identiques, donc $V(t_1, \dots, t_n) = 0$. La formule fonctionne !

2^{ième} cas : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow t_i \neq t_j$

On pose $V(t_1, \dots, t_n)$ le déterminant recherché. On va faire « varier » la dernière ligne. On pose :

$$V(t_1, \dots, t_{n-1}, \mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_{n-1} & \dots & t_{n-1}^{n-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{X} & \dots & \mathbf{X}^{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe ensuite par rapport à la dernière ligne :

$$V(t_1, \dots, t_{n-1}, X) = (-1)^{n+1} \Delta_{n,1} + (-1)^{n+2} \Delta_{n,2} X + \dots + (-1)^{n+n} \Delta_{n,n} X^{n-1}$$

Or on remarque que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Delta_{n,i} \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de X .

On en déduit donc que $V(t_1, \dots, t_{n-1}, X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose $P_{n-1}(\mathbf{X}) = V(t_1, \dots, t_{n-1}, \mathbf{X})$

On sait que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P_{n-1}(t_i) = V(t_1, \dots, \mathbf{t}_i, \dots, t_{n-1}, \mathbf{t}_i) = 0$$

On a donc $n-1$ racines pour $P_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on les a toutes !

De plus on a le coefficient dominant de P_{n-1} :

$$\Delta_{n,n} = V(t_1, \dots, t_{n-1})$$

On a donc :

$$P_{n-1}(\mathbf{X}) = V(t_1, \dots, t_{n-1})(\mathbf{X} - t_1) \dots (\mathbf{X} - t_{n-1})$$

On a donc :

$$P_{n-1}(\mathbf{t}_n) = V(t_1, \dots, t_n) = V(t_1, \dots, t_{n-1})(\mathbf{t}_n - t_1) \dots (\mathbf{t}_n - t_{n-1}) = V(t_1, \dots, t_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (t_n - t_i)$$

En réitérant le procédé au rang inférieur on a :

$$V(t_1, \dots, t_n) = V(t_1, \dots, t_{n-2}) \times \left[\prod_{i=1}^{n-1} (t_n - t_i) \right] \times \left[\prod_{i=1}^{n-2} (t_{n-1} - t_i) \right]$$

En réitérant le procédé $n-2$ fois on a :

$$\begin{aligned} V(t_1, \dots, t_n) &= V(t_1, t_2) \times \left[\prod_{i=1}^{n-1} (t_n - t_i) \right] \times \left[\prod_{i=1}^{n-2} (t_{n-1} - t_i) \right] \times \dots \times \left[\prod_{i=1}^2 (t_3 - t_i) \right] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{vmatrix} \times \left[\prod_{i=1}^{n-1} (t_n - t_i) \right] \times \left[\prod_{i=1}^{n-2} (t_{n-1} - t_i) \right] \times \dots \times \left[\prod_{i=1}^2 (t_3 - t_i) \right] = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i) \end{aligned}$$

Exercice 12 : Utiliser un déterminant pour montrer que les familles suivantes sont des bases de E :

a) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X(X-1)$ et $P_3(X) = (X-1)^2$

b) $E = \mathbb{C}^3, e_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -2+i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$

a) On calcule :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 = 1 \neq 0$$

Donc $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) On calcule :

$$\begin{vmatrix} 1+i & i & -2+i \\ 1 & -1 & 0 \\ i & 1-i & -i \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i & -2+i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & -i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1+2i & -2+i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -(-i(1+2i) - (-2+i))$$

$$= -4 + 2i \neq 0$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2+i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 13 : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On pose :

$$u_A: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$$

a) Montrer que u est un endomorphisme.

b) Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.

a) On a :

$$\forall (M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u_A(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 = \lambda u_A(M_1) + u_A(M_2)$$

Donc $u_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$.

b) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a alors $\det(A) = ad - bc$.

$$\text{De plus on pose } E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$u_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + cE_{2,1}$$

$$u_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{1,2} + cE_{2,2}$$

$$u_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{1,1} + dE_{2,1}$$

$$u_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{1,2} + dE_{2,2}$$

$$\text{mat}_{(E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})}(u_A) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \det(u_A) &= \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = a \times (ad^2 - cbd) + c(-abd + cb^2) \\ &= a^2d^2 + c^2b^2 - 2adbc \\ &= (ad - bc)^2 \\ &= (\det(A))^2 \end{aligned}$$

Exercice 14 : Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égale à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda P_1 + P_2)(X) &= \int_X^{X+1} (\lambda P_1 + P_2)(t) dt \\ &= \lambda \int_X^{X+1} P_1(t) dt + \int_X^{X+1} P_2(t) dt \end{aligned}$$

Avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(X) = \int_X^{X+1} (\lambda P_1 + P_2)(t) dt = \lambda \int_X^{X+1} P_1(t) dt + \int_X^{X+1} P_2(t) dt = \lambda \varphi(P_1)(X) + \varphi(P_2)(X)$$

Donc φ est linéaire.

On cherche à présent son déterminant. On pose $P_1(X) = 1, P_2(X) = X$ et $P_3(X) = X^2$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(P_1)(X) &= \int_X^{X+1} 1 dt = 1 \\ \varphi(P_2)(X) &= \int_X^{X+1} t dt = \frac{(X+1)^2}{2} - \frac{X^2}{2} = X + \frac{1}{2} \\ \varphi(P_3)(X) &= \int_X^{X+1} t^2 dt = \frac{(X+1)^3}{3} - \frac{X^3}{3} = X^2 + X + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)) = \det(\varphi) = 1$$

Exercice 15 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

a) On pose : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = C$.

c) Calculer $\det(C)$, $\det(f)$ et $\det(A)$.

a) On peut le faire de différentes façons. Je vais utiliser le déterminant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dvt} \setminus C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) On a :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C$$

c) On sait que le déterminant d'une matrice triangulaire (donc en partie une matrice diagonale !) est le produit des éléments de la diagonale.

De plus on sait que le déterminant est invariant par changement de base. On a donc :

$$\det(C) = \det(f) = \det(A) = 24.$$

Exercice 16 : Résoudre chacun des systèmes suivants

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases} ; \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ce système admet une unique solution si et seulement si $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} = A$ est inversible.

On calcule :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ est inversible donc le système } \begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases} \text{ admet une unique solution.}$$

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De même on veut résoudre :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$. On va regarder pour quelles valeurs de m la matrice est inversible.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 - m^2 & 1 - m \\ 0 & 1 - m & m - 1 \end{vmatrix} = -(1 - m)^2 \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 + m & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(1 - m)^2 (-1 - m - 1) \\ &= (1 - m)^2 (m + 2) \end{aligned}$$

Ainsi le système $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ admet une unique solution si et seulement si $m \notin \{-2; 1\}$.

1^{er} cas : Si $m \notin \{-2; 1\}$

2^{ème} cas : Si $m = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

Donc le système admet une infinité de solutions, c'est géométriquement le plan d'équation $(\mathcal{P}) : x + y + z = 1$.

3^{ème} cas : Si $m = -2$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

On a :

$$(-2x + y + z) + (x - 2y + z) = -x - y + 2z \text{ et } 1 + (-2) = -1 \neq 4$$

Le système $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$ n'a aucune solution. Il est incompatible !