

Correction DS n°8

Exercice : Saut d'une puce

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, nommés A, B, C et D , d'un carré selon le protocole suivant :

- A l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet A , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet B , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet C , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$, la puce se trouve sur le sommet D , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n , on note :

$A_n = \ll$ La puce se trouve au sommet A \gg

$B_n = \ll$ La puce se trouve au sommet B \gg

$C_n = \ll$ La puce se trouve au sommet C \gg

$D_n = \ll$ La puce se trouve au sommet D \gg

1) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}(A_0), \mathbb{P}(B_0), \mathbb{P}(C_0), \mathbb{P}(D_0)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)$$

3) Exprimer de même $\mathbb{P}(B_{n+1}), \mathbb{P}(C_{n+1}), \mathbb{P}(D_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n), \mathbb{P}(D_n)$.

4) Déterminer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n)$.

5) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}, V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } R = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelle relation existe-t-il entre U_{n+1}, U_n, R et V ?

6) a) Déterminer une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $L = RL + V$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = R^n(U_0 - L) + L$$

7) On pose $M = 6R$ et on appelle f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M .

8) a) On définit $Q_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$. Montrer que Q_M est un polynôme de degré trois, possédant trois racines réelles, à déterminer, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

b) Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$, déterminer une base de chaque sous-espace $E_k = \ker(M - \lambda_k I_3) = \ker(f - \lambda_k \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

c) On pose $B_k = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_k = \text{vect}(E_k)$. Montrer que B est une base de \mathbb{R}^3 .

(Conseil : Je vous conseille de prendre des coordonnées entières pour les e_i).

d) Ecrire la matrice de f dans la base B , appelé Δ .

e) Quelle relation existe-t-il entre les matrices M et Δ ?

9) Indiquer une méthode de calcul de R^n (on ne demande pas une expression détaillée).

10) a) En déduire la limite de U_n (c'est-à-dire de chacune des composantes de la colonne U_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$.

b) Déterminer $\lim_n \mathbb{P}(D_n)$.

11) Si l'on décide d'écraser cette puce, où vaut-il mieux frapper ?

1) Comme la puce est en A à l'instant $n = 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_0) = 1, \mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(C_0) = \mathbb{P}(D_0) = 0$$

2) D'après la loi des probabilités totales :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap D_n)$$

Or on a :

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(A_n)$$

De même on a :

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(B_n)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(B_n)$$

3) On a de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap D_n)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(D_n)$$

Enfin on trouve :

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(B_n)$$

$$\mathbb{P}(D_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(C_n) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(D_n)$$

4) On sait que :

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n) = 1$$

5) On a :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(B_n) \\ \frac{1}{2} \mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(D_n) \\ \frac{1}{3} \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(B_n) \end{pmatrix}$$

Or on sait que :

$$\mathbb{P}(D_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(C_n)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(C_n)) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \\ -\frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) - \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{RU_n + V}
 \end{aligned}$$

6) a) On pose $L = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On résout :

$$\begin{aligned}
 L = RL + V &\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4a + 3b \\ -2a - 2b + c \\ 2a + 3b \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ b + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c = \frac{1}{3} \\ c - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2a = 3b \\ 2a + 8b + c = 2 \\ c = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{10} \\ b = \frac{1}{5} \\ c = \frac{1}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

b) On raisonne par récurrence.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = "U_n = R^n(U_0 - L) + L"$$

Initialisation : $n = 0$

On a :

$$R^0(U_0 - L) + L = I_3(U_0 - L) + L = u_0$$

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie \mathcal{P}_n .

On a :

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} &= RU_n + L = R[R^n(U_0 - L) + L] + L \\
 &= R^{n+1}(U_0 - L) + \underbrace{RL + L}_{=L} \\
 &= R^{n+1}(U_0 - L) + L
 \end{aligned}$$

Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = R^n(U_0 - L) + L$$

7) On pose :

$$\begin{aligned}
 M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 & 0 \\ -2 & -2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (4 - \lambda) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (4 - \lambda)[\lambda(2 + \lambda) - 3] - 3[2\lambda - 2] \\
 &= (4 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) - 6(\lambda - 1) \\
 &= (4 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 3) - 6(\lambda - 1) \\
 &= (\lambda - 1)[(4 - \lambda)(\lambda + 3) - 6] \\
 &= (\lambda - 1)[- \lambda^2 + \lambda + 6] \\
 &= -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 \text{ et } \lambda_3 = 3$$

On a :

$$E_1 = \ker(f - \lambda_1 Id_{\mathbb{R}^3}) = \ker(M + 2I_3)$$

On cherche donc e_1 tel que $Me_1 = -2e_1$. On résout et on peut poser : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De même on cherche :

$$Me_2 = e_2.$$

On résout et on peut poser : $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Enfin on résout :

De même on cherche :

$$Me_3 = 3e_3.$$

On résout et on peut poser : $e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) On pose :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

d) On a :

$$\text{mat}_{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \Delta$$

e) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

9) On a :

$$R^n = \left(\frac{1}{6}M\right)^n = \frac{1}{6^n}(P\Delta P^{-1})^n = \frac{1}{6^n}P\Delta^n P^{-1} \text{ (par récurrence immédiate)}$$

On a donc :

$$R^n = P \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/6^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{6}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

10) a) On sait que :

$$U_n = R^n(U_0 - L) + L$$

Or on a :

$$\lim_n U_n = 0_3$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n U_n = L = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{10}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b) On a donc :

$$\boxed{\lim_n \mathbb{P}(D_n) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}}$$

11) Si on veut écraser la puce, il vaut mieux frapper en *A* ou *D*.

Problème I : Interpolation de Hermite

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction dérivable de $[a, b]$ à valeur dans \mathbb{R} ($f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$).

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite

On considère l'application :

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) \end{cases}$$

- 1) Démontrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^4)$.
- 2) Démontrer que Φ est un isomorphisme.
- 3) En déduire que :

$$\forall f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R}), \exists! H \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } H(a) = f(a), H'(a) = f'(a), H(b) = f(b), H'(b) = f'(b)$$

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite

On introduit l'application :

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_a^b P(t) dt \end{cases}$$

On note \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_4 les bases canoniques respectives de \mathbb{R} et \mathbb{R}^4 . Pour tout $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, on pose $P_k(X) = (X - a)^k$ puis $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. Pour simplifier les écritures, on notera $\delta = b - a$.

- 1) Démontrer que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- 2) Déterminer la représentation matricielle de l'application linéaire Φ relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{E}_4 . On note A cette matrice.
- 3) Montrer que $A \in GL_4(\mathbb{R})$ et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}$$

- 4) Justifier que l'application φ est linéaire et déterminer sa représentation matricielle relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{E}_1 . On notera B cette matrice.
- 5) Soit $f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$ et $H \in \mathbb{R}_3[X]$ définie à la question 3 de la partie A. Montrer que :

$$\int_a^b H(t) dt = \frac{\delta}{2} (f(a) + f(b)) + \frac{\delta^2}{12} (f'(a) - f'(b))$$

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale

On suppose à présent que f est de classe \mathcal{C}^4 .

- 1) Montrer que :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall t \in [a, b], |f^{(4)}(t)| \leq M$$

- 2) On note h la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur $[a, b]$. On pose $d = f - h$.

- a) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^4 sur $[a, b]$ et que $d^{(4)} = f^{(4)}$.
- b) Démontrer que d' s'annule en trois points distincts sur $[a, b]$ puis que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a, b]$.
- c) Démontrer que lemme suivant :

Lemme : Soit $g \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ et $K \geq 0$ tel que $\forall t \in [a, b], |g'(t)| \leq K$. Alors :

$$\forall t \in [a, b], |g(t)| \leq K(b - a)$$

d) En déduire que :

$$\forall t \in [a, b], |d(t)| \leq M(b - a)^4$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ la subdivision régulière du segment $[a, b]$. Pour tout $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, on pose h_k la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur le segment $[t_k, t_{k+1}]$. Dorénavant, on réemploie la lettre h pour définir la fonction définie sur $[a, b]$ par $h(b) = f(b)$ et dont la restriction sur $[t_k, t_{k+1}[$ est égale à h_k pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

a) Montrer que la fonction h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

b) Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Donner une majoration de $\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)] dt \right|$ dépendant de M, a, b et n .

c) Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b h(t) dt \right| \leq \frac{M}{n^4} (b - a)^5$$

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite

1) On a :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, P_1, P_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_3[X], \Phi(\lambda P_1 + P_2) \\ = ((\lambda P_1 + P_2)(a), (\lambda P_1 + P_2)'(a), (\lambda P_1 + P_2)(b), (\lambda P_1 + P_2)'(b)) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$(\lambda P_1 + P_2)' = \lambda P_1' + P_2'$$

De même on a :

$$(\lambda P_1 + P_2)(a) = \lambda P_1(a) + P_2(a)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, P_1, P_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_3[X], \Phi(\lambda P_1 + P_2) \\ = \lambda(P_1(a), P_1'(a), P_1(b), P_1'(b)) + (P_2(a), P_2'(a), P_2(b), P_2'(b)) \\ = \lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2) \end{aligned}$$

Donc $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^4)$

2) Démontrer que Φ est un isomorphisme.

On a :

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= (1, 0, 1, 0), \text{ et} \\ \left\{ \begin{array}{l} \Phi(1) = (1, 0, 1, 0) \\ \Phi(X) = (a, 1, b, 1) \\ \Phi(X^2) = (a^2, 2a, b^2, 2b) \\ \Phi(X^3) = (a^3, 3a^2, b^3, 3b^2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{mat}_{(1,X,X^2,X^3),\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^4)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \\ b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 & \\ 1 & 2b & 3b^2 & \end{vmatrix} \\ &= (b-a) \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \\ 1 & b+a & b^2+ab+a^2 & \\ 0 & 2(b-a) & 3(b^2-a^2) & \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \\ 0 & b-a & b^2+ab-2a^2 & \\ 0 & 2(b-a) & 3(b^2-a^2) & \end{vmatrix} \\ &= (b-a)^2 \begin{vmatrix} b-a & b^2+ab-2a^2 & \\ 2 & 3(b+a) & \end{vmatrix} \\ &= (b-a)^3 \begin{vmatrix} 1 & b+2a & \\ 2 & 3(b+a) & \end{vmatrix} = (b-a)^4 \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que Φ est inversible, **c'est donc un isomorphisme.**

3) Il suffit de prendre $f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$, cela crée un unique 4-uplet $(f(a), f'(a), f(b), f'(b))$ et comme Φ est un isomorphisme, on a **l'unicité de $H \in \mathbb{R}_3[X]$.**

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite

1) \mathcal{B} est une famille de **polynômes échelonnés** et $|\mathcal{B}| = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

2) On a :

$$\begin{cases} \Phi(1) = (1, 0, 1, 0) \\ \Phi(X-a) = (0, 1, b-a, 1) \\ \Phi(X^2) = (0, 0, (b-a)^2, 2(b-a)) \\ \Phi(X^3) = (0, 0, (b-a)^3, 3(b-a)^2) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \Phi(1) = (1, 0, 1, 0) \\ \Phi(X-a) = (0, 1, \delta, 1) \\ \Phi((X-a)^2) = (0, 0, \delta^2, 2\delta) \\ \Phi((X-a)^3) = (0, 0, \delta^3, 3\delta^2) \end{cases}$$

On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ 0 & 1 & 2\delta & 3\delta^2 \end{pmatrix}$$

3) On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ 0 & 1 & 2\delta & 3\delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Donc $A \in GL_4(\mathbb{R})$ et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}$$

4) On a :

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \int_a^b (\lambda P_1 + P_2)(t) dt = \lambda \int_a^b P_1(t) dt + \int_a^b P_2(t) dt$$

Donc φ est linéaire. De plus on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(1) = b - a = \delta \\ \varphi(X - a) = \frac{\delta^2}{2} \\ \varphi((X - a)^2) = \frac{\delta^3}{3} \\ \varphi((X - a)^3) = \frac{\delta^4}{4} \end{cases}$$

On a donc :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_1}(\varphi) = \left(\delta, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^3}{3}, \frac{\delta^4}{4} \right)$$

5) On sait que $H \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\begin{cases} H(a) = f(a) \\ H'(a) = f'(a) \\ H(b) = f(b) \\ H'(b) = f'(b) \end{cases}$$

On a :

$$\int_a^b H(t) dt = \varphi(H) = \varphi\left(\Phi^{-1}\left((f(a), f'(a), f(b), f'(b))\right)\right) = \varphi \circ \Phi^{-1}(u)$$

Avec :

$$u = (f(a), f'(a), f(b), f'(b))$$

6) On a :

$$\int_a^b H(t)dt = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_1}(\varphi) \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(H) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_1}(\varphi) \times \text{mat}_{\mathcal{E}_4, \mathcal{B}}(\Phi^{-1}) \times \text{mat}_{\mathcal{E}_4}(u)$$

$$= \left(\delta, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^3}{3}, \frac{\delta^4}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ f(b) \\ f'(b) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \frac{\delta}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{\delta^2}{12}(f'(a) - f'(b))}$$

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale

1) $f^{(4)}$ est continue car f est de classe \mathcal{C}^4 . Or on sait que toute fonction continue sur un segment est majorée et atteint ses bornes. On a donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall t \in [a, b], |f^{(4)}(t)| \leq M$$

2) a) On sait que $h \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc h est de classe \mathcal{C}^4 et :

$$h^{(4)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

On en déduit donc que d est de classe \mathcal{C}^4 et par linéarité :

$$\boxed{d^{(4)} = f^{(4)}}$$

b) On a $d(a) = f(a) - h(a) = 0, d(b) = f(b) - h(b) = 0$. On a donc d'après le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } d'(c) = 0$$

On a donc $d'(c) = 0$

De plus on a :

$$d'(a) = f'(a) - h'(a) = 0 \text{ et } d'(b) = f'(b) - h'(b) = 0$$

Donc d' s'annule en trois points distincts sur $[a, b], a, b$ et c .

On applique alors le théorème de Rolle en trois points pour d'' , ce qui nous donne :

$$d''(c_1) = d''(c_2) = 0 \text{ avec } a < c_1 < c < c_2 < b$$

On applique de nouveau Rolle pour $d^{(3)}$ et cela prouve que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a, b]$.

c) Il suffit d'appliquer le théorème des inégalités des accroissements finis (car $g \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$), en t et en c :

$$|g(t) - g(c)| \leq K|t - c| \leq K(b - a)$$

d) On sait d'après la question 1 que :

On sait que $d^{(3)}$ remplit les hypothèses du lemme. On a donc :

$$\forall t \in [a, b], |d^{(3)}(t)| \leq M(b - a)$$

De plus $d^{(2)}$ remplit aussi les hypothèses du lemme :

$$\forall t \in [a, b], |d^{(2)}(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |d^{(3)}(t)| (b - a) \leq M(b - a)^2$$

En répétant le procédé pour d' et d on obtient :

$$\forall t \in [a, b], |d(t)| \leq M(b - a)^4$$

3)

a) Il suffit de regarder les raccordements, car sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$, h est de classe \mathcal{C}^1 .

On a :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_{k+1} \\ t < t_{k+1}}} h'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_{k+1} \\ t < t_{k+1}}} h'_k(t) = h'_k(t_{k+1}) = f'(t_{k+1})$$

De même on a :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_{k+1} \\ t > t_{k+1}}} h'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_{k+1} \\ t > t_{k+1}}} h'_k(t) = h'_{k+1}(t_k) = f'(t_{k+1})$$

Donc h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

b) On pose :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, d_k = f - h_k$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)] dt \right| &= \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} d_k(t) dt \right| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |d_k(t)| dt \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} M(t_{k+1} - t_k)^4 dt \\ &\leq M(t_{k+1} - t_k)^5 \\ &\leq \frac{M}{n^5} (b - a)^5 \end{aligned}$$

c) On sait que :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b h(t) dt \right| &= \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h_k(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)] dt \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t) - h_k(t)] dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{n^5} (b - a)^5 \\ &\leq \frac{M}{n^4} (b - a)^5 \end{aligned}$$