Activité 1 : Espace euclidien

Dans toute cette partie E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et Soit $\Phi: E \times E \to \mathbb{R}$ une application quelconque.

Question 1 : On dit que Φ est symétrique si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \Phi(x,y) = \Phi(y,x)$$

Déterminer une application $\Phi_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ symétrique et une application $\Phi_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non symétrique.

Question 2 : On dit que Φ est :

- Linéaire à droite si et seulement si :

$$\forall x \in E, y \mapsto \Phi(x,y) \in \mathcal{L}(E)$$

- Linéaire à gauche si et seulement si :

$$\forall y \in E, x \mapsto \Phi(x,y) \in \mathcal{L}(E)$$

Déterminer une application $\Phi_3: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire à gauche mais pas à droite.

Question 3 : On dit que Φ est bilinéaire si elle est linéaire à gauche et à droite. Déterminer une application $\Phi_3: \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ bilinéaire.

Question 4 : Montrer que :

$$\begin{cases} \Phi \text{ est symétrique} \\ \Phi \text{ est linéaire à droite} \end{cases} \Rightarrow \Phi \text{ est bilinéaire}$$

Question 5 : On dit que Φ est définie positive si et seulement si :

$$\forall x \in E, \Phi(x,x) \geq 0 \ (Positive)$$
$$\Phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ (définie)$$

Déterminer Φ_4 une application définie positive de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Question 6 : Déterminer $\Phi_5: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive, de même que $\Phi_6: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Activité 1 : Espace euclidien

Dans toute cette partie E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et Soit $\Phi: E \times E \to \mathbb{R}$ une application quelconque.

Question 1 : On dit que Φ est symétrique si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \Phi(x,y) = \Phi(y,x)$$

Déterminer une application $\Phi_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ symétrique et une application $\Phi_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non symétrique.

Question 2 : On dit que Φ est :

- Linéaire à droite si et seulement si :

$$\forall y \in E, x \mapsto \Phi(x,y) \in \mathcal{L}(E)$$

- Linéaire à gauche si et seulement si :

$$\forall x \in E, y \mapsto \Phi(x,y) \in \mathcal{L}(E)$$

Déterminer une application $\Phi_3: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire à gauche mais pas à droite.

Question 3 : On dit que Φ est bilinéaire si elle est linéaire à gauche et à droite. Déterminer une application $\Phi_3: \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ bilinéaire.

Question 4 : Montrer que :

$$\begin{cases} \Phi \text{ est symétrique} \\ \Phi \text{ est linéaire à droite} \end{cases} \Rightarrow \Phi \text{ est bilinéaire}$$

Question 5 : On dit que Φ est définie positive si et seulement si :

$$\forall x \in E, \Phi(x,x) \geq 0 \ (Positive)$$
$$\Phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ (définie)$$

Déterminer Φ_4 une application définie positive de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Question 6 : Déterminer $\Phi_5: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive, de même que $\Phi_6: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$