

Chapitre 29 : Produit scalaire et espace euclidien
Partie A : Présentation

Dans tout ce chapitre E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel, non nécessairement de dimension finie.

I) Un produit scalaire généralisé

a) Un peu de vocabulaire

Définition : Soit $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que Φ est symétrique si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \Phi(x, y) = \Phi(y, x)$$

Exemple I.a.1 : Déterminer une application symétrique de $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R} et une non symétrique.

Définition : Soit $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que Φ est :

- Linéaire à droite si et seulement si :

$$\forall y \in E, x \mapsto \Phi(x, y) \in \mathcal{L}(E)$$

- Linéaire à gauche si et seulement si :

$$\forall x \in E, y \mapsto \Phi(x, y) \in \mathcal{L}(E)$$

Si Φ vérifie la linéarité à droite et à gauche, on dit que Φ est bilinéaire.

Exemple I.a.2 : Déterminer une application bilinéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

Définition : Soit $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que Φ est définie positive si et seulement si :

$$\forall x \in E, \Phi(x, x) \geq 0 \text{ (Positive)}$$

$$\Phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (définie)}$$

Exemple I.a.3 : Déterminer une application définie positive de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R} .

b) Le produit scalaire

Définition : On appelle produit scalaire sur E , toute forme bilinéaire symétrique définie positive $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. On note alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \Phi(x, y) = \langle x, y \rangle = (x|y) = x \cdot y$$

Exemple I.b.1 : Démontrer que :

$$\Phi: \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{array} \right.$$

Est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

Exemple I.b.2 : Démontrer que :

$$\Phi: \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(i)Q(i) \end{array} \right.$$

Est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple I.b.3 : Démontrer que :

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{C}^0([0,1]) \times \mathcal{C}^0([0,1]) \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{cases}$$

Est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Espaces euclidien et préhilbertien

Définition : Un E \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ est appelé un espace préhilbertien réel, on note alors $(E, \langle ., . \rangle)$.

Si E est de dimension finie, on dit que $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace euclidien.

Application I.c.1 : Donner un espace préhilbertien réel est un espace euclidien.

II) Norme euclidienne

a) Une définition généralisée

Définition : Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $e \in E$ un élément de E . On appelle norme euclidienne de e , notée $\|e\|$, le réel :

$$\|e\| = \sqrt{\langle e, e \rangle}$$

Exemple II.a.1 : On pose :

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^2 P(i)Q(i) \end{cases}$$

Calculer $\|X^2 - 3X + 1\|$.

Exemple II.a.2 : On pose :

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \times \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)dt \end{cases}$$

Calculer $\|\cos^3\|$.

Propriété II.a.3 : On a :

$$(1) \|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0_E$$

$$(2) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall e \in E, \|\lambda e\| = |\lambda| \|e\|$$

b) Distance euclidienne

Définition : Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, e_2) \in E^2$ deux éléments de E . On appelle distance de e_1 à e_2 , notée $d(e_1, e_2)$, le réel $\|e_1 - e_2\|$:

$$\forall (e_1, e_2) \in E^2, d(e_1, e_2) = \|e_1 - e_2\|$$

Exemple II.b.1 : On pose :

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) \mapsto \text{Tr}(M^T \times N) \end{cases}$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer $d(M_1, M_2)$ avec :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Identités remarquables

Propriété II.c.1 : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$(1) \forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$$

$$(2) \forall (x, y) \in E^2, \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

$$(3) \forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$(4) \text{ Egalité du parallélogramme : } \forall (x, y) \in E^2, 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

d) Inégalité de Cauchy-Schwartz

Propriété II.d.1 : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Application II.d.2 :

$$\forall ((x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Application II.d.3 : Montrer que :

$$\forall ((x_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (]0; 1])^n, \sum_{k=1}^n x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Propriété II.d.4 (Inégalité triangulaire) : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Remarque : On a de même :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Propriété II.d.5 : On a l'équivalence suivante :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \exists \alpha \geq 0, y = \alpha \cdot x$$

Propriété II.d.6 :

$$\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$