Fiche exercices chapitre 29
Espace préhilbertien réel

Partie A : Le produit scalaire

Exercice A.1 : On pose :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t) dt \end{cases}$$

Montrer que Φ est un produit scalaire.

Exercice A.2 :

On considère le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on pose pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$:

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

b) Représenter la boule unité, c'est à dire l'ensemble des $x \in E$ tels que $||x|| \leq 1$.

Exercice A.3 : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1])$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\, g(t) dt \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\, dt} \sqrt{\int_0^1 g^2(t) dt}$$

Exercice A.4 :

On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \quad < f, g >= f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

b) Établir que :

$$\forall f \in E, \quad \left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right).$$

Exercice A.5 :

On considère l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose : $< M, N >= Tr({}^tMN)$.

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

b) Établir que : $\forall M \in E, \quad (\sum_{i=1}^{n} m_{i,i})^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2.$

Exercice A.6 : Montrer que $< P, Q > = P'(0)Q'(0) + P'(1)Q'(1) + P(0)Q(0)$ définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie B : Orthogonalité

Exercice B.1 :

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1,2,-1,1)$ et $V_2 = (0,3,1,-1)$. On pose $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^{\perp}$.

Exercice B.2 :

On pose $u_1 = (0,1,1,1), u_2 = (1,0,1,1), u_3 = (1,1,0,1), u_4 = (1,1,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. L'orthonormaliser.

Exercice B.3 : Déterminer l'orthogonalité des fonctions paires pour le produit scalaire :

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Sur l'ensemble $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.

Exercice B.4 : Déterminer l'orthogonal de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$ pour le produit scalaire

$$< P, Q > = \sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i)$$

Exercice B.5 :

On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \ldots, e_p)$ de E espace euclidien de dimension n, vérifiant la relation suivante :

$$\forall v \in E, \quad ||v||^2 = \sum_{i=1}^{p} < e_k, v >^2 .$$

Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale, puis que c'est une base orthonormale de E. En déduire que $n = p$.

Exercice B.6 :

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice B.7 :

$E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. Etudier les endomorphismes de matrice A dans $\mathscr{B}$ suivants :

$$1)\ A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2/\ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3/\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice B.8 :

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire.

b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

c) Calculer le minimum pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Exercice B.9 :

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $L_p(X) = \dfrac{d^p}{dX^p}(X^p(X-1)^p)$.

a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

b) Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera son degré et son coefficient dominant.

c) Calculer par intégration par parties $< L_p, L_q >$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

Exercice B.10 :

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E, et soit A une partie de E. Montrer que :

$$A^\perp = Vect(A)^\perp \quad ; \quad F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp \quad ; \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Montrer l'égalité lorsque E est de plus de dimension finie.

Exercice B.11 (Théorème de représentation de Riesz) :

On considère un espace euclidien E.

a) Montrer que l'application $v \mapsto \varphi_v =< v, \cdot >$ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Ainsi pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) =< v, x > .$$

b) Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si c'est l'orthogonal d'un vecteur non nul.

Montrer que deux hyperplans sont identiques si et seulement s'ils sont orthogonaux à une même droite vectorielle.

Exercice B.12 : Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de F puis le projeté orthogonale de $u = (1,2,3)$ sur F.