Colle n°29
(Du 10 au 14 juin)

Déterminant

- Déterminant d'une famille de vecteurs
- Déterminant d'une matrice carrée
- Déterminant d'un endomorphisme

Variables aléatoires

- Définition
- Lois uniforme, binomiale, Bernoulli
- Lois conjointe et marginales d'un couple $X\ et\ Y$
- Indépendance de deux variables aléatoires
- Espérance, variance et covariance

Démo de cours

_ Espérance et variance de la **loi uniforme, de la loi binomiale**.

_ Inégalité de **Markov et de Bienaymé-Tchevbychev**

Propriété III.b.4 : Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires sur un même espace probabilisé. On a alors :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cos(X_i, Xj)$$

Exercices types

Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde) : Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)$$

Exercice 7 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Application II.c.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

Exercice C.5 : On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.

b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_k) + 1$.

c) Déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $k \to +\infty$.