Fiche d'exercices 28 : Variables aléatoires

Partie A : Lois des variables aléatoires

Exercice A.1 : Soit $N \geq 2$. On lance N fois une pièce de monnaie équilibrée. On pose X la variable aléatoire donnant le numéro du jet pour lequel on obtient pile pour la première fois, et renvoie 0 si l'on obtient jamais pile.
Déterminer la loi de X.

On a : $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}, \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}$. D'une façon générale on a :

$$\forall k \in [\![1;N]\!], \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{2^k}$$

De plus on a :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}=\mathbf{0})=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{N}}$$

Exercice A.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Montrer que X suit une loi uniforme.

On a :

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X\neq 1)\times \mathbb{P}_{\{X\neq 1\}}(X=2)=\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(X>2)\times \mathbb{P}_{\{X>2\}}(X=3)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$$

D'une façon générale :

$$\forall k \in [\![2;n]\!], \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X>k-1)\times \mathbb{P}_{\{X>k-1\}}(X=k)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times \dots \times\frac{n-k}{n-k+1}\times\frac{1}{n-k}$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\frac{n-i}{n-i+1}=\frac{1}{n}$$

Donc X suit une loi uniforme.

Exercice A.3 : n amis vont au cinéma et choisissent entre 3 films F_1, F_2 et F_3. Les choix sont indépendants et équilibrés entre les films. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note X_i le nombre de personnes choisissant le film F_i.
a) Déterminer la loi de X_i, pour $i \in \{1,2,3\}$.
b) Soit Y le nombre de films ayant reçu au moins un choix. Déterminer la loi de Y.

a) On pose :

$$\forall i \in \{1,2,3\}, X_i = Y_{1,i}+Y_{2,i}+\dots+Y_{n,i}$$

Avec $Y_{k,i}$ qui vaut 1 si la $k-$ième personne a choisi le film X_i et 0 sinon.

j	0	1
$\mathbb{P}(Y_{k,i}=j)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

On répète indépendamment n une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. On a donc :

$$\mathbf{X_i \sim Bin\left(n;\frac{1}{3}\right)}$$

b) $Y(\Omega) = \{1,2,3\}$

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}$	$\frac{2}{3^{n-1}}(2^{n-1}-1)$	$1 - \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{2}{3^{n-1}}(2^{n-1}-1) = 1 + \frac{1}{3^{n-1}}(1-2^n)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}(\{X_1 = n\} \cup \{X_2 = n\} \cup \{X_3 = n\}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = n) + \mathbb{P}(X_2 = n) + \mathbb{P}(X_3 = n) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

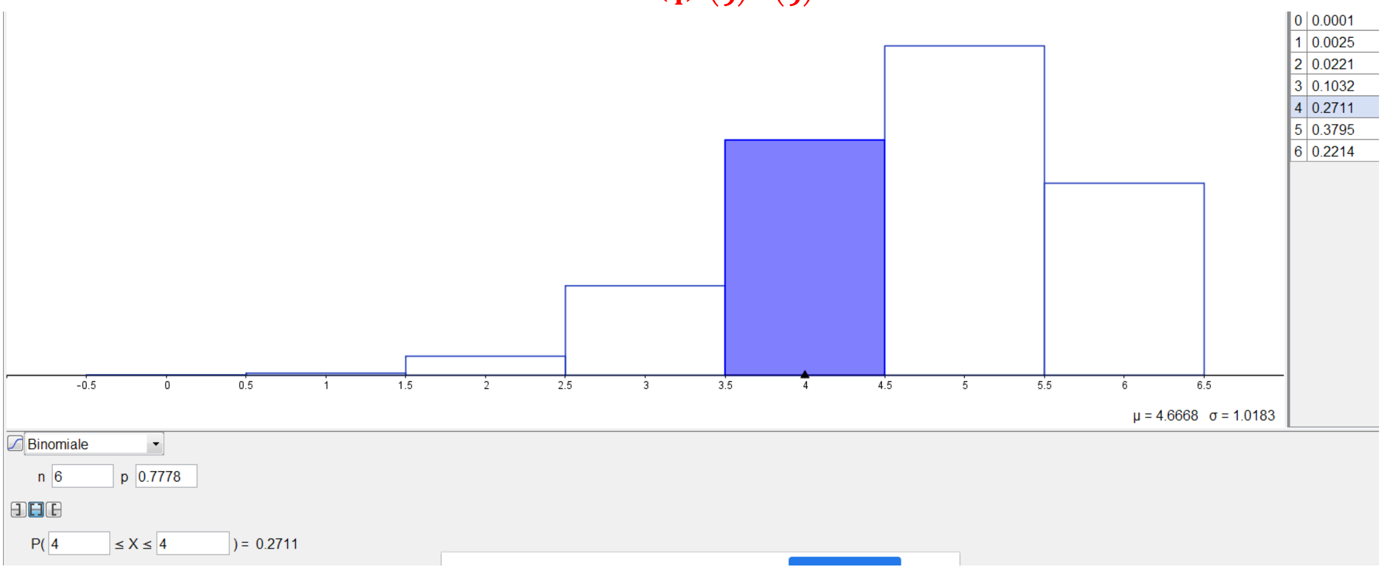
$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}\Big((\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 \geq 1\} \cap \{X_3 \geq 1\}) \cup (\{X_2 = 0\} \cap \{X_1 \geq 1\} \cap \{X_3 \geq 1\})$$
$$\cup (\{X_3 = 0\} \cap \{X_2 \geq 1\} \cap \{X_1 \geq 1\})\Big) = 3 \times \mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 \geq 1\} \cap \{X_3 \geq 1\})$$
$$= 3 \times \mathbb{P}(\{X_1 = 0\}) \times \mathbb{P}_{\{X_1=0\}}(\{X_2 \geq 1\} \cap \{X_3 \geq 1\}) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \mathbb{P}_{\{X_1=0\}}(\{X_2 = n\}) - \mathbb{P}_{\{X_1=0\}}(\{X_2 = 0\})\right)$$
$$= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \mathbf{\frac{2}{3^{n-1}}(2^{n-1}-1)}$$

Exercice A.4 : Une urne contient deux boules blanches et sept boules noires. On tire successivement et avec remise 6 fois dans l'urne. On pose B_6 la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues. Déterminer la probabilité de $\{B_6\} = 4$.

On répète 6 fois indépendamment une expérience de Bernoulli de probabilité $\frac{7}{9}$. On pose B_6 la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues. B_6 suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{7}{9}$.

On a donc :

$$\mathbb{P}(\mathbf{B_6 = 4}) = \binom{6}{4}\left(\frac{7}{9}\right)^4\left(\frac{2}{9}\right)^2 \sim \mathbf{0{,}27}$$



On peut faire un programme Python pour illustrer cela :

```python
def exerciceA4(n):
    a=[]
    for i in range(7):
        a.append('noire')
    for i in range(2):
            a.append('blanche')
    compteur=0
    for i in range(n):
        blanche=0
        for j in range(6):
            b=r.randint(0,8)
            if a[b]=='noire':
                blanche=blanche+1
        if blanche==4:
            compteur=compteur+1
    return (compteur/n)
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> exerciceA4(1000)
0.271
```

Exercice A.5 : On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des évènements. On pose X le nombre d'ampoules défectueuses.

1) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$
2) Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$
3) Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$

1) On sait que :

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = \frac{67}{91}}$$

2) On a :

$$\mathbf{\mathbb{P}(X = 3) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} = \frac{2}{91}}$$

3) On a :

$$\mathbf{\mathbb{P}(X = 1) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} \times 3 = \frac{45}{91}}$$

Partie B : Couple de variables aléatoires

Exercice B.1 : Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X \backslash Y$	a_1	a_2	a_3
b_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
b_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

De plus on a $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ dès que $i \neq j$.
1) Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

1) On sait que :

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

On a :

k	b_1	b_2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$\mathbb{P}(X = b_1) = \mathbb{P}\big((X = b_1) \cap (Y = a_1)\big) + \mathbb{P}\big((X = b_1) \cap (Y = a_2)\big) + \mathbb{P}\big((X = b_1) \cap (Y = a_3)\big)$$
$$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

De même on a :

k	a_1	a_2	a_3
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\mathbb{P}(Y = a_1) = \mathbb{P}\big((X = b_1) \cap (Y = a_1)\big) + \mathbb{P}\big((X = b_2) \cap (Y = a_1)\big) = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

2) On a :

$$\mathbb{P}\big((X = b_1) \cap (Y = a_1)\big) = 0 \neq \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \mathbb{P}(X = b_1) \times \mathbb{P}(Y = a_1)$$

Donc X et Y ne sont pas indépendants !

Exercice B.2 : On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si on tire un roi} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ; Y = \begin{cases} 1 \text{ si on tire une dame} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ; \quad Z = \begin{cases} 1 \text{ si on tire un coeur} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples (X, Y) et (X, Z).

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

a) On a :

X\Y	0	1
0	$\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	0

X\Z	0	1
0	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$
1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

k	0	1
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

k	0	1
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$\mathbb{P}\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$$

Il suffit de trouver un contre-exemple !

On vérifie pour toutes les probabilités :

$$\begin{cases} \mathbb{P}\big((X=0)\cap(Z=0)\big)=\dfrac{21}{32} \\ \mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Z=0)=\dfrac{7}{8}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{21}{32} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{P}\big((X=0)\cap(Z=0)\big)=\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Z=0)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}\big((X=0)\cap(Z=1)\big)=\dfrac{7}{32} \\ \mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Z=1)=\dfrac{7}{8}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{32} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{P}\big((X=0)\cap(Z=1)\big)=\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Z=1)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}\big((X=1)\cap(Z=0)\big)=\dfrac{3}{32} \\ \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Z=0)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{32} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{P}\big((X=1)\cap(Z=0)\big)=\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Z=0)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}\big((X=1)\cap(Z=1)\big)=\dfrac{1}{32} \\ \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Z=1)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{32} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{P}\big((X=1)\cap(Z=1)\big)=\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Z=1)$$

On en déduit donc que X et Z sont indépendantes !

Exercice B.3 : Soients U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1;1\}$ prenant toutes les deux la valeur 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

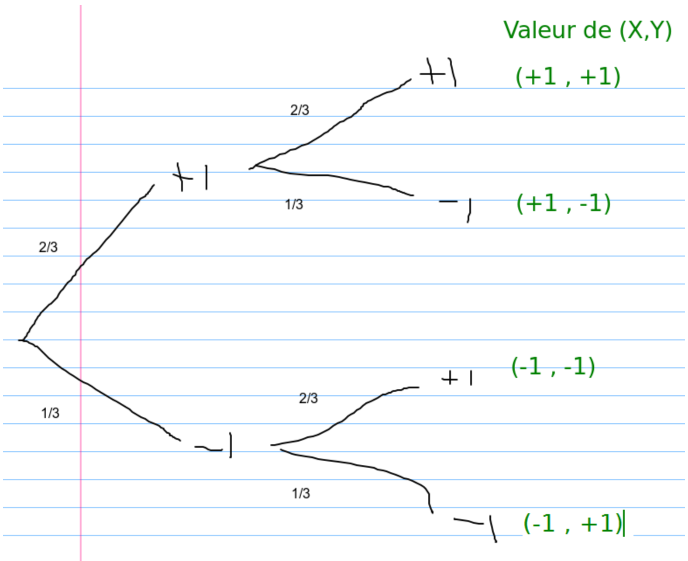
Soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$X=U, Y=\begin{cases} V \text{ si } U=1 \\ -V \text{ si } U=-1 \end{cases}$$

a) Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X,Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

On peut faire un arbre de probabilité :



a) On a :

k	-1	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

De même on a :

k	-1	1
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

On a de plus :

X\Y	-1	1
-1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

Pour voir si X et Y sont indépendants on calcule :

$$\begin{cases} \mathbb{P}\big((X=1)\cap(Y=1)\big)=\frac{4}{9} \\ \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}=\frac{10}{27} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{P}\big((X=1)\cap(Y=1)\big)\neq\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1)$$

On en déduit que ***X* et Y sont dépendants** !

Exercice B.4 : Soient $p\in]0;1[$, $(n,m)\in\mathbb{N}^*$. On se donne X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$ respectivement.

a) Montrer que :

$$\forall k\in[\![0;m+n]\!],\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

b) En déduire que X_1+X_2 suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$

a) On peut le faire de différentes façons.

Méthode 1 : Polynômes

On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall(m,n)\in\mathbb{R}^2,(1+x)^n\times(1+x)^m=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right)$$

On peut ensuite utiliser le produit de Cauchy pour les polynômes :

$$PQ(X)=R(X)=\left(\sum_{i=0}^{n}p_ix^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{n}q_jx^j\right)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kx^k\ avec\ c_k=\sum_{i+j=k}p_iq_j$$

On a donc :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\right)x^k$$

Or on a :

$$(1+x)^n\times(1+x)^m=(1+x)^{n+m}=\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall k\in[\![0;m+n]\!],\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}}$$

Remarque : On a ici : $\binom{n}{i}=0$ dès que $i>n$.

Méthode 2 : Par récurrence

On sait d'après l'identité de Fermat que :

$$\binom{p+q}{r}=\binom{p+q-1}{r-1}+\binom{p+q-1}{r}$$
$$=\binom{p+q-2}{r-2}+\binom{p+q-2}{r-1}+\binom{p+q-2}{r-1}+\binom{p+q-2}{r}$$

$$=\binom{p+q-2}{r-2}+2\binom{p+q-2}{r-1}+\binom{p+q-2}{r}$$
$$=\binom{p+q-3}{r-3}+\binom{p+q-3}{r-2}+2\binom{p+q-3}{r-2}+2\binom{p+q-3}{r-1}+\binom{p+q-3}{r-1}+\binom{p+q-3}{r}$$
$$=\binom{p+q-3}{r-3}+3\binom{p+q-3}{r-2}+3\binom{p+q-3}{r-1}+\binom{p+q-3}{r}$$
$$=\binom{p+q-4}{r-4}+\binom{p+q-4}{r-3}+3\binom{p+q-4}{r-3}+3\binom{p+q-4}{r-2}+3\binom{p+q-4}{r-2}+3\binom{p+q-4}{r-1}+\binom{p+q-4}{r-1}+\binom{p+q-4}{r}$$
$$=\binom{p+q-4}{r-4}+4\binom{p+q-4}{r-3}+6\binom{p+q-4}{r-2}+4\binom{p+q-4}{r-1}+\binom{p+q-4}{r}$$

On peut donc émettre l'hypothèse que :

$$\forall i\in[\![0;p+q]\!],\binom{p+q}{r}=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{p+q-i}{r-k}$$

Cette propriété est vraie pour $i=0$.
A présent si $i\in[\![0;p+q-1]\!]$, fixé. On suppose vraie

$$\binom{p+q}{r}=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{p+q-i}{r-k}$$

On a alors :

$$\binom{p+q}{r}=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{p+q-i}{r-k}=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\left[\binom{p+q-i-1}{r-k-1}+\binom{p+q-i-1}{r-k}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{p+q-i-1}{r-k-1}+\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{p+q-i-1}{r-k}$$
$$=\binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)}+\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i}{k}\binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)}+\binom{p+q-(i+1)}{r}+\sum_{k=1}^{i}\binom{i}{k}\binom{p+q-(i+1)}{r-k}$$
$$=\binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)}+\binom{p+q-(i+1)}{r}+\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i}{k}\binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)}+\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i}{k+1}\binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)}$$
$$=\binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)}+\binom{p+q-(i+1)}{r}+\sum_{k=0}^{i-1}\left(\underbrace{\binom{i}{k}+\binom{i}{k+1}}_{\binom{i+1}{k+1}}\right)\binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)}$$
$$=\binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)}+\binom{p+q-(i+1)}{r}+\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i+1}{k+1}\binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)}$$
$$=\binom{i+1}{i+1}\binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)}+\binom{i+1}{0}\binom{p+q-(i+1)}{r-0}+\sum_{k=1}^{i}\binom{i+1}{k}\binom{p+q-(i+1)}{r-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{i+1}\binom{i+1}{k}\binom{p+q-(i+1)}{r-k}$$

Donc la propriété reste vraie.
D'après le principe de récurrence on a démontré que :

$$\boldsymbol{\forall i\in[\![0;p+q]\!],\binom{p+q}{r}=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{p+q-i}{r-k}}$$

Il suffit alors de prendre :

$$k=i\text{ et }i=p\text{ et on a :}$$

$$\forall (\mathrm{p},\mathrm{q},\mathrm{r})\in\mathbb{N}^3, \text{tel que } \mathrm{r}\leq \mathrm{p}+\mathrm{q}, \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{p}}\binom{\mathrm{p}}{\mathrm{i}}\binom{\mathrm{q}}{\mathrm{r}-\mathrm{i}}=\binom{\mathrm{p}+\mathrm{q}}{\mathrm{r}}$$

Méthode 3 : Dénombrement

Soit E un ensemble tel que $|E| = n + m$, $(F, G) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $|F| = n\ et\ |G| = m$. On a alors :

$$\binom{n+m}{k} = |\{X \subset E\ tel\ que\ |X| = k\}|$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\{X \subset E\ tel\ que\ |X| = k\} &= \{Y \subset F\ tel\ que\ |Y| = k\} \cup (\{Y \subset F\ tel\ que\ |Y| = k-1\} \cup \{Z \subset G\ tel\ que\ |G| = 1\}) \\ &\cup (\{Y \subset F\ tel\ que\ |Y| = k-2\} \cup \{Z \subset G\ tel\ que\ |G| = 2\}) \cup \dots. \\ &\cup (\{Y \subset F\ tel\ que\ |Y| = 0\} \cup \{Z \subset G\ tel\ que\ |G| = k\}) \\ &= \bigcup_{i=0}^{k} \underbrace{\{Y \subset F\ tel\ que\ |Y| = i\} \cup \{Z \subset G\ tel\ que\ |G| = k-i\}}_{A_{i,k-i}} \\ &= \bigcup_{i=0}^{k} A_{i,k-i}\end{aligned}$$

Or les $A_{i,k-i}$ sont tous d'intersection nuls, donc on a :

$$\boldsymbol{\binom{n+m}{k} = |\{X \subset E\ tel\ que\ |X| = k\}| = \left|\bigcup_{i=0}^{k} A_{i,k-i}\right| = \sum_{i=0}^{k} |A_{i,k-i}| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}$$

b) Ici aussi on peut le voir de deux façons différentes.

Méthode 1 : Par le calcul

De la façon dont est construit l'exercice, cela nous invite à le faire ainsi.

On a :

$$\forall k \in [\![0; \mathrm{m}+\mathrm{n}]\!], \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = i \cap X_2 = k-i)$$

Or X_1 et X_2 sont indépendantes donc :

$$\mathbb{P}(X_1 = i \cap X_2 = k-i) = \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}(X_2 = k-i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0; \mathrm{m}+\mathrm{n}]\!], \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \\ &= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}\end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$\boldsymbol{X_1 + X_2 \sim B(n+m, p)}$$

Méthode 2 : Somme de Bernoulli

$$X_1 \sim B(n, p) \Rightarrow X_1 = Y_1 + \dots + Y_n$$

Avec Y_i indépendants et deu même loi $Ber(p)$

De même :

$$X_2 \sim B(m, p) \Rightarrow X_2 = Z_1 + \dots + Z_m$$

Avec Z_i indépendants et deu même loi $Ber(p)$

On a donc :

$$X_1 + X_2 = Y_1 + \dots + Y_n + Z_1 + \dots + Z_m$$

De plus X_1 et X_2 sont indépendants donc les bernoulli aussi.

Donc on a $X_1 + X_2$ qui s'écrit comme la somme de $n + m$ variables aléatoires indépendantes et de même loi $Ber(p)$. On a donc :

$$\boldsymbol{X_1 + X_2 \sim B(n+m, p)}$$

Exercice B.5 : N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n, avec $n \geq 2$. Soit X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i.
a) Déterminer la loi de X_i.
b) Les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont-elles indépendantes ?

a) On peut écrire :

$$X_i = P_{1,i} + \cdots + P_{N,i}$$

Avec $P_{j,i} = 1$ si la personne j a choisi le fournisseur i et 0 sinon. On sait que les $\left(P_{j,i}\right)$ sont indépendantes et de même loi :

$$\mathbb{P}\left(P_{j,i} = 1\right) = \frac{1}{n}$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{X_i \sim Bin\left(\frac{1}{n}, N\right)}$$

b) Ce n'est évidemment pas le cas. Il suffit de prendre un contre-exemple : $N = 2 = n$. On a alors :

$$\boldsymbol{\mathbb{P}(X_1 = 2) \times \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{16} \; et \; \mathbb{P}\big((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)\big) = 0}$$

Partie C : Espérance et variance

Exercice C.1 : L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi les trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.
1) Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
a) Les trois sujets tirés.
b) Exactement deux sujets sur les trois sujets.
c) Aucun des trois sujets.
2) Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

1) Nous allons faire la question 1 et 2 en même temps.
On pose S le nombre de sujets révisés par le candidat parmi les 3 sujets tirés.
On a :

$$a)\ \mathbb{P}(S = 3) = \frac{60}{100} \times \frac{59}{99} \times \frac{58}{98} \sim 0{,}21$$

$$b)\mathbb{P}(S = 2) = \binom{3}{2} \times \frac{60}{100} \times \frac{59}{99} \times \frac{40}{98} \sim 0{,}44$$

$$c)\mathbb{P}(S = 0) = \frac{40}{100} \times \frac{39}{99} \times \frac{38}{98} \sim 0{,}06$$

2) On a :

$S(\Omega) = k$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(S = k)$	$\frac{40}{100} \times \frac{39}{99} \times \frac{38}{98} \sim 0{,}06$	$\binom{3}{1} \times \frac{60}{100} \times \frac{40}{99} \times \frac{39}{98} \sim 0{,}31$	$\binom{3}{2} \times \frac{60}{100} \times \frac{59}{99} \times \frac{40}{98} \sim 0{,}44$	$\frac{60}{100} \times \frac{59}{99} \times \frac{58}{98} \sim 0{,}21$

$$\boldsymbol{\mathbb{E}(S) \sim 1{,}81}$$

Exercice C.2 : On lance 10 fois de suite un dé 6 parfait.
a) On appelle X le nombre de fois qu'on a obtenu une face portant un numéro pair. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance.
b) On appelle Y la somme de tous les points obtenus. Trouver l'espérance de Y.
c) On appelle Z le nombre de faces différentes qui sont apparues. Calculer l'espérance de Z. Dans le cas où on lance le dé 3 fois (au lieu de 10), écrire explicitement la loi de probabilité de Z, et retrouver directement la valeur de $E(Z)$.

a) On répète 10 fois indépendamment une expérience de Bernoulli de paramètre 0,5. Donc $X \sim Bin\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

b) On pose $R_i = \text{"}Le\ résultat\ du\ dé\ au\ i - ème\ lancer\text{"}$. On a :

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_{10} \Longrightarrow \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y_1 + \cdots + Y_{10}) = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{E}(Y_i)$$

Or on sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \times k = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{E}(Y) = 10 \times 3{,}5 = 35$$

c) On pose $Z = X_1 + \cdots + X_{10}$ avec :

$$X_i = \begin{cases} 1\ si\ nouvelle\ face\ obtenue \\ 0\ sinon \end{cases}$$

On a par exemple :

$$X_1 = 1\ et\ \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{5}{6}$$

On sait par linéarité que :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{E}(X_k)$$

De plus on a :

$$\forall k \in [\![1; 10]\!], \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{P}(X_k = 1)$$

On pose :

$$\forall k \in [\![1; 10]\!], Z_k = X_1 + \cdots + X_k$$

On a alors :

$$X_{k+1} = Z_{k+1} - Z_k$$

De plus on a :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \cap Z_k = i) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(Z_k = i) \times \mathbb{P}_{(Z_k = i)}(X_{k+1} = 1)$$
$$= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(Z_k = i) \times \frac{6 - i}{6}$$
$$= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(Z_k = i) - \frac{1}{6} \times \sum_{i=1}^{6} i \times \mathbb{P}(Z_k = i)$$
$$= 1 - \frac{1}{6} \mathbb{E}(Z_k)$$

De plus on sait que :

$$\mathbb{E}(Z_{k+1} - Z_k) = \mathbb{E}(X_{k+1}) = \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{6} \mathbb{E}(Z_k)$$
$$\Longrightarrow \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{5}{6} \mathbb{E}(Z_k) + 1$$

On a donc affaire à une suite arithmético-géométrique.
On cherche le point fixe :

$$p = \frac{5}{6}p + 1 \Longrightarrow p = 6$$

On a donc :

$$\forall k \geq 1, \mathbb{E}(Z_k) - 6 = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} (-5)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{Z_k}) = \mathbf{6 - 5} \times \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{k-1}} = \frac{\mathbf{6}^{\boldsymbol{k}} - \mathbf{5}^{\boldsymbol{k}}}{\mathbf{6}^{\boldsymbol{k-1}}}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}) = \frac{\mathbf{6^{10} - 5^{10}}}{\mathbf{6^9}}$$

Si on lance trois fois on a :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{36}, \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 3 = \frac{15}{36}, \mathbb{P}(Z = 3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{20}{36}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{Z_3}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{91}}{\mathbf{36}}$$

Or $6^3 - 5^3 = 91$ donc on retrouve le résultat voulu !

Exercice C.3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit r tel que $0 \leq r \leq n$. Un placard contient n paires de chaussures. On tire, au hasard, 2r chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.
Les paires du placard sont numérotées de 1 à n. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i −ième paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.
a) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi et l'espérance de X_i.
b) Déterminer l'espérance de X.

a) Evidemment toutes les variables aléatoires X_i ont la même loi, puisqu'il n'y a aucune raison de favoriser l'une plutôt que l'autre. Chercher $\mathbb{P}(X_1 = 1)$.
On a :

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X_1} = \mathbf{1}) = \frac{\binom{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{2}}{\mathbf{2}\boldsymbol{r}-\mathbf{2}}}{\binom{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}\boldsymbol{r}}} = \frac{\boldsymbol{r}(\mathbf{2}\boldsymbol{r}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}$$

Remarque : On peut vérifier que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 \; si \; r = n$
b) On a :

$$X = X_1 + \cdots + X_n \Longrightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = n \times \mathbb{E}(X_1) = \frac{\boldsymbol{r}(\mathbf{2}\boldsymbol{r}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$$

De même on a bien $\mathbb{E}(X) = n$ si $r = n$. Cela ne prouve pas que cela soit juste mais au moins c'est cohérent.

Exercice C.4 : Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec la probabilité $p \in]0,1[$, ou par $\beta \in]0,1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n.
a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
b) On suppose $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Quelle doit être la valeur de p pour que $\mathbb{E}(S_n) = 1$?
c) On suppose $\beta = 1 - h$ et $\alpha = 1 + h$ pour $h \in]0,1[$. Quelle doit être la valeur de p pour que $\mathbb{E}(S_n) = 1$? Que vaut alors $\mathcal{V}(S_n)$?

a) On pose Y_n la variable aléatoire égale à 1 si l'action a été multiplié par α au jour n, et 0 sinon.
On a alors :

$$Y_i \sim B(p)$$

On pose :

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$$

X_n représente le nombre d'augmentation au bout de n jours. Comme les Y_i sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p (d'après l'énoncé), on a $X \sim Bin(n, p)$. On a alors :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \mathbb{P}(S_n = \alpha^k \times \beta^{n-k}) = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On a alors :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{x \in S_n(\Omega)} x \times \mathbb{P}(S_n = x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \times \beta^{n-k} \times \mathbb{P}(S_n = \alpha^k \times \beta^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \times \beta^{n-k} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha p)^k \big(\beta(1-p)\big)^{n-k} = (\alpha p + \beta - \beta p)^n$$

De plus on a :

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n)^2 = \sum_{x \in S_n(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}(S_n = x) - (\alpha p + \beta - \beta p)^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} \times \beta^{2(n-k)} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - (\alpha p + \beta - \beta p)^{2n} = \left(\alpha^2 p + \beta^2 (1-p)\right)^n - (\alpha p + \beta - \beta p)^{2n}$$

b) On résout :

$$\left(\alpha p + \frac{1}{\alpha}(1-p)\right)^n = 1 \Longrightarrow \alpha p + \frac{1}{\alpha}(1-p) = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{\alpha + 1}$$

Exercice C.5 : On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.

b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_k) + 1$.

c) Déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $k \to +\infty$.

a) On sait que :

$$X_{k+1} - X_k = \begin{cases} 1 \text{ si on a remis une boule dans l'urne } A \\ -1 \text{ si on a enlevé une boule dans l'urne } A \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k) = 1 \times \mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = 1) - \mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = -1)$$

De plus on sait que :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = -1) = 1 - \mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = 1)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k) = 2 \times \mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = 1) - 1$$

Or on sait que :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = 1) = \sum_{i=0}^{b} \mathbb{P}\big((X_{k+1} - X_k = 1) \cap (X_k = i)\big)$$

De plus on a :

$$\mathbb{P}\big((X_{k+1} - X_k = 1) \cap (X_k = i)\big) = \mathbb{P}(X_k = i) \times \mathbb{P}_{X_k = i}((X_{k+1} - X_k = 1)) = \mathbb{P}(X_k = i) \times \frac{b-i}{b}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = 1) = \sum_{i=0}^{b} \mathbb{P}(X_k = i) \times \frac{b-i}{b} = \sum_{i=0}^{b} \mathbb{P}(X_k = i) - \frac{1}{b}\sum_{i=0}^{b} i \times \mathbb{P}(X_k = i)$$

$$= 1 - \frac{1}{b}\mathbb{E}(X_k)$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(\mathbf{X_{k+1}}-\mathbf{X_k}) = \mathbf{2}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}\mathbb{E}(\boldsymbol{X_k})\right)-\mathbf{1} = -\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{b}}\mathbb{E}(\boldsymbol{X_k})+\mathbf{1}$$

b) On utilise la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_{k+1}-X_k) = \mathbb{E}(X_{k+1})-\mathbb{E}(X_k)$$
$$\Longrightarrow \mathbb{E}(\mathbf{X_{k+1}}) = \left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{b}}\right)\mathbb{E}(\mathbf{X_k})+\mathbf{1}$$

c) On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \mathbb{E}(X_k)$$

On a donc :

$$u_{k+1} = \left(1-\frac{2}{b}\right)u_k+1$$

C'est une suite arithmético-géométrique.

_ On cherche le point fixe :

$$X = \left(1-\frac{2}{b}\right)X+1 \Longrightarrow X = \frac{b}{2}$$

_ On en déduit donc que :

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_k} = \left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{u_0}-\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right)+\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}} \rightarrow \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$$

Le résultat est cohérent car les boules sont réparties équitablement en l'infini.

Exercice C.6 : Soit $N \geq 2$. Une urne contient $N+1$ boules numérotées de 0 à N. On tire avec remise une boule. On considère les variables aléatoires suivantes : $X_1 = 1$, et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.

a) Déterminer la loi de X_i.

b) Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?

a) On a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, X_i \in \{0;1\}$$

Il suffit donc de chercher $\mathbb{P}(X_i = 0)$ ou $\mathbb{P}(X_i = 1)$. Evidemment le nombre de boules différentes tirées précédemment va faire varier la probabilité.

On a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1, \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{N}{N+1}$$
$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_3 = 1 \cap X_2 = 1)+\mathbb{P}(X_3 = 1 \cap X_2 = 0)$$
$$= \mathbb{P}(X_2 = 1) \times \mathbb{P}_{X_2=1}(X_3 = 1)+\mathbb{P}(X_2 = 0) \times \mathbb{P}_{X_2=0}(X_3 = 1)$$
$$= \frac{N}{N+1} \times \frac{N-1}{N+1}+\frac{1}{N+1} \times \frac{N}{N+1}$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X_3 = 1) = \left(\frac{N}{N+1}\right)^2$$

De la même façon nous pouvons prouver que :

$$\mathbb{P}(X_4 = 1) = \left(\frac{N}{N+1}\right)^3$$

On peut donc conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = 1) = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{n-1}$$

On va démontrer cela par récurrence forte.

On pose :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{n}) = \text{"}\ \mathbb{P}(\boldsymbol{X_n} = \mathbf{1}) = \left(\frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}+\mathbf{1}}\right)^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\text{"}$$

Initialisation : $n = 1$

On sait que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ et $\left(\frac{N}{N+1}\right)^{1-1} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{0} = 1$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$ un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \leq n$.

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Y_n représente le nombre de numéros différents obtenus.

On a alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}\big((X_{n+1} = 1) \cap (Y_n = k)\big) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(Y_n = k) \times \mathbb{P}_{Y_n=k}(X_{n+1} = 1)$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{Y_n=k}(X_{n+1} = 1) &= \frac{N+1-k}{N+1} \\ &= 1 - \frac{k}{N+1}\end{aligned}$$

De plus on sait que $X_n \sim Ber(p_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{E}(X_n)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(Y_n = k) \times \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(Y_n = k) - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} k \times \mathbb{P}(Y_n = k) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \mathbb{E}(Y_n)\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k-1} \quad (d'après l'HR forte) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{k} = \frac{1 - \left(\frac{N}{N+1}\right)^{n}}{1 - \frac{N}{N+1}} = (N+1) \times \left(1 - \left(\frac{N}{N+1}\right)^{n}\right)\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = 1 - \left(1 - \left(\frac{N}{N+1}\right)^{n}\right) = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{n}}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence forte.

Exercice C.7 : Soient $(a, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considere $N = a \times n$ clients qui s'approvisionnent chez n fournisseurs. Chaque client choisit un fournisseur au hasard. Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on note Xi le nombre de clients du fournisseur i et Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Xi.
2. Que vaut X1 +· · ·+ Xn ? En déduire E(XiXj) et Cov(Xi,Xj) pour i , j.
3. Soit βi la variable aléatoire indicatrice de l'évènement : ≪ le fournisseur i n'a pas de client ≫. Exprimer Y en fonction des βi.

Déterminer E(Y).

4. Calculer Cov(βi,βj).
5. Déterminer la variance de Y.

1) On cherche la loi de X_i.

On répète, indépendamment, $a \times n$ fois une expérience de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{n}$. Ainsi on a :

$$\boldsymbol{X_i \sim B\left(an, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \mathbb{E}(X_i) = a \text{ et } \mathbb{V}(X_i) = a\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

2) On sait que :

$$X_1 + \cdots + X_n = an$$

De plus on sait que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_1, X_2)$$

On a donc :

$$X_1 + \cdots + X_n = an \Longrightarrow X_1^2 + \sum_{k=2}^{n} X_1 X_n = anX_1 \Longrightarrow \mathbb{E}\left(\sum_{k=2}^{n} X_1 X_k\right) = an\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1^2)$$

Or on sait que :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=2}^{n} X_1 X_n\right) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(X_1 X_k) = (n-1)\,\mathbb{E}(X_1 X_2)$$

De plus on a :

$$an\mathbb{E}(X_1) = a^2 n$$

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 = a\frac{n-1}{n} + a^2$$

Ainsi on a :

$$(n-1)\,\mathbb{E}(X_1, X_2) = a^2 n - a\frac{n-1}{n} - a^2 \Longrightarrow \mathbb{E}(X_1, X_2) = a^2 - \frac{a}{n}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow Cov(Xi, X_j) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = a^2 - \frac{a}{n} - a^2 = -\frac{a}{n}}$$

3) On a :

$$Y = \beta_1 + \cdots + \beta_n$$

On a par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\beta_i) = n\mathbb{E}(\beta_1)$$

Or on sait que :

$$\boldsymbol{\mathbb{E}(\beta_1) = \mathbb{P}(\beta_1 = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{an} \Longrightarrow \mathbb{E}(Y) = n \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{an}}$$

4) De même que précédemment on a :

$$Cov(\beta i, \beta_j) = \mathbb{E}(\beta_1 \beta_2) - \mathbb{E}(\beta_1)^2$$

Or on a :

$$\mathbb{E}(\beta_1 \beta_2) = \mathbb{P}(\beta_1 \beta_2 = 1) = \mathbb{P}(\beta_1 = 1) \times \mathbb{P}_{\beta_1 = 1}(\beta_2 = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{an} \times \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{an} = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{an}$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{Cov(\beta i, \beta_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}}$$

5) On sait que :

$$\mathbb{V}(Y) = Cov(Y, Y) = Cov\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\beta_i); \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\beta_i)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\beta_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(\beta_i, \beta j)$$

$$\boldsymbol{= n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{an}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{an}\right) + n(n-1)\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right)}$$

Exercice C8 : Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p.

1) Quelle est la loi de X_n? Sa moyenne? Sa variance?

2) Démontrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

3) En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

1) On a :

$$\boldsymbol{X_n \sim B(n,p) \Longrightarrow \mathbb{E}(X_n) = np \text{ et } \mathbb{V}(X_n) = np(1-p)}$$

2) On sait d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :

$$\mathbb{P}(|X_n - np| \geq n\epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2\epsilon^2}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{np(1-p)}{n^2\epsilon^2}$$

De plus on sait que (on pourra étudier la fonction $x \mapsto x(1-x)$) que :

$$\forall p \in [0;1], p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n^2\epsilon^2}}$$

3) On veut que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 0{,}95$$

$$\Longrightarrow 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \geq 0{,}95$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq 0{,}05$$

On résout :

$$\frac{1}{4n^2 10^{-4}} \leq 0{,}05 \Longrightarrow n \geq \sqrt{2000}$$

Ainsi on devra tester un échantillon d'environ **45 pièces**.

Exercice C9 : 1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n,p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

2) **Application** : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100?

1) Fais dans l'exercice précédent !

2) Il faut traduire cette question en terme de probabilité !

On pose X_n le nombre de fois que le 6 apparaît. Ainsi on a :

$$\frac{X_n}{n} = Fréquence\ d'apparition\ du\ 6$$

De plus on a :

$$X_n \sim B\left(n; \frac{1}{6}\right)$$

On veut que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \leq {}^\wedge 10^{-2}\right)$$

Comme dans l'exercice précédent on trouve $n \geq 45$.