Colle n°30
(Du 16 au 20 juin)

Variables aléatoires

- Définition
- Lois uniforme, binomiale, Bernoulli
- Lois conjointe et marginales d'un couple X et Y
- Indépendance de deux variables aléatoires
- Espérance, variance et covariance

Espaces préhilbertien réel

- Définition du produit scalaire comme une application bilinéaire, symétrique définie positive.
- Vecteurs orthogonaux, espaces orthogonaux

Remarque : Nous avons arrêté le cours juste avant la démonstration de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Il est demandé aux étudiants de savoir montrer qu'une application de $E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, et de donner l'orthogonal d'une partie ou d'un vecteur.

Démo de cours

_ Espérance et variance de la **loi uniforme, de la loi binomiale**.

_ Inégalité de **Markov et de Bienaymé-Tchevbychev**

Propriété III.b.4 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires sur un même espace probabilisé. On a alors :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cos(X_i, Xj)$$

Démontrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i) \end{cases}$$

Exercices types

Exercice B.4 : Soient $p \in]0;1[, (n, m) \in \mathbb{N}^*$. On se donne X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement.
a) Montrer que :

$$\forall k \in [\![0; m+n]\!], \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

b) En déduire que $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n + m, p)$
c) Retrouver ce résultat avec des sommes de variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli.

Exercice B.6 : Soit $N \geq 2$. Une urne contient $N + 1$ boules numérotées de 0 à N. On tire avec remise une boule. On considère les variables aléatoires suivantes : $X_1 = 1$, et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.
a) Déterminer la loi de X_i.
b) Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?

Exercice C.5 : On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.

b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right) \mathbb{E}(X_k) + 1$.

c) Déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $k \to +\infty$.

Exercice A.1 : On pose :

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2) f(t) g(t) dt \end{cases}$$

Montrer que Φ est un produit scalaire.

$$\forall ((x_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (]0;1])^n, \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$