Chapitre I : Inégalité dans $\mathbb{R}$

I) Quelques propriétés de l'ensemble des réels

a) Une relation d'ordre

Propriété I.a.1 : $\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est dite relation d'ordre total, c'est-à-dire qu'elle possède les propriétés suivantes :
(1) Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
(2) Antisymétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies y = x$
(3) Transitivité : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$
(4) Elle est totale : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x$

Propriété I.a.2 (Compatibilité avec + et ×) : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ **:**
(1) $a \leq b$ équivaut à $a + c \leq b + c$
(2) Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$
(3) Pour tout $c < 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \geq bc$
(4) Pour tout $c > 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \leq bc$
(5) Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$
(6) Si $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, ou $(a,b) \in (\mathbb{R}^{-*})^2$ tels que $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Remarque : Il ne faut **SURTOUT** pas confondre :
_ Résoudre une inéquation
_ Démontrer une inégalité

Application I.a.3 : Résoudre l'inéquation suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+2}{x-3} < 4$$

Application I.a.4 : Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, ln(1+x) \leq x$$

Remarque : Si l'on doit démontrer une inégalité sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$, on peut utiliser une récurrence.

Application I.a.5 : Démontrer que :

$$\forall q \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+q)^n \geq 1 + nq$$

b) Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition (intervalle de $\mathbb{R}$) : On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si :
- $I = [a;b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, (a;b) \in \mathbb{R}^2$
- $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, (a;b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$
- $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, (a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}) \times \mathbb{R}$
- $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, (a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$

Exemple I.b.1 : $I = [2;5]$; $J =]-\infty; 9]$

ATTENTION : Une réunion disjointe d'intervalles de $\mathbb{R}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Propriété I.b.2 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) : On a l'équivalence suivante :

$$I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\ (x_1; x_2) \in I^2, [x_1; x_2] \subset I$$

Remarque : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont dits « sans trou ». En particulier $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

c) Fonctions croissantes ou décroissantes

Définition : Soit I un intervalle de ℝ et f : I⟶ ℝ une fonction. On dit que :

- f est croissante sur I ⇔ $(\forall (x_1;x_2) \in I^2$ *tel que* $x_1 \leq x_2, \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
- f est décroissante sur I ⇔ $(\forall (x_1;x_2) \in I^2$ *tel que* $x_1 \leq x_2, \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$

Application I.c.1 : Déterminer les variations de : $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x^2+1} \end{cases}$

Remarque : On peut utiliser la monotonie d'une fonction pour démontrer des inégalités ou résoudre des inéquations.

Application I.c.2 : Résoudre l'inéquation suivante dans ℝ : $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$

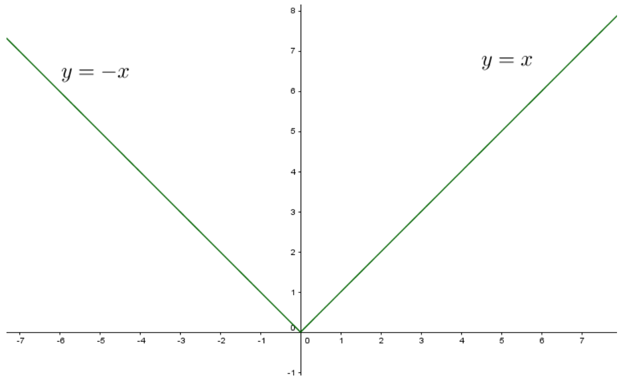
Définition (Monotonie) : Si une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle I, on dit que f est monotone (strictement si elle est strictement croissante ou décroissante).

II) La valeur absolue

a) Définition

Définition (fonction valeur absolue) : Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x le nombre réel positif, noté |x| tel que :

$$|\mathrm{x}| = \begin{cases} \mathrm{x} \text{ si } \mathrm{x} \geq 0 \\ -\mathrm{x} \text{ si } \mathrm{x} \leq 0 \end{cases}$$



Remarque : Cette définition est une restriction à ℝ de la définition du module sur ℂ.

Exemple II.a.1 : Résoudre : $|\mathrm{x} - 3| < 4$

Application II.a.2 : Résoudre l'inéquation suivante : $|\mathrm{x} + 1| + |\mathrm{x} + 7| < 10$

Application II.a.3 : Ecrire la double inégalité suivante sous forme d'une seule inégalité : $a \leq x \leq b$.

Propriété II.a.4 (Inégalité triangulaire sur ℝ) :

$$\forall (\mathrm{x}, \mathrm{x}') \in \mathbb{R}^2, \big||\mathrm{x}| - |\mathrm{x}'|\big| \leq |\mathrm{x} + \mathrm{x}'| \leq |\mathrm{x}| + |\mathrm{x}'|$$

Application II.a.5 : Démontrer que pour tout n −uplet de nombres réels, la valeur absolue de leur somme est toujours plus petite que la somme de leur valeur absolue.

b) Majorant et minorant

Dans toute cette partie, A désigne une partie de ℝ $(A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Définition (Majorant) : Soit M un réel. On dit que M est un majorant de A si et seulement si : $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \mathrm{x} \leq \mathrm{M}$

Définition (Minorant) : On dit que m est un minorant de A si et seulement si : $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \mathrm{x} \geq \mathrm{m}$

Remarque : Lorsque A est à la fois minorée et majorée, on dit que A est bornée.

Propriété/Définition II.b.1 : S'il existe un majorant M de A appartenant à A, on dit que M est le maximum de A et ce dernier est unique.
S'il existe un minorant m de A appartenant à A, on dit que m est le minimum de A et ce dernier est unique.

Exemple II.b.2 : Déterminer dans les exemples suivants si les parties A de ℝ sont majorées, minorées, bornées, et donner le cas échéant un exemple de majorant, minorant, maximum et minimum.

$$\mathrm{A} = \mathbb{R}^*{}_+ ; \mathrm{B} = [0;1[; \mathrm{C} = \mathbb{Z}, \mathrm{D} = \left\{\frac{1}{\mathrm{n}} ; \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*\right\}$$