Chapitre II : Généralité sur les fonctions

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

I) Propriétés d'une fonction

a) Ensemble de définition

Définition (ensemble de définition) : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. On appelle domaine de définition de f l'ensemble :

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{f}} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} \text{ tels que } \mathrm{f}(\mathrm{x}) \text{ existe}\}$$

Si $\mathrm{x} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{f}}$ et $y = f(x)$ on dit que :

- y est l'image de x par f
- x est un antécédent de y par f.

Remarque : Pour définir une fonction, il faut donner son ensemble de définition. Usuellement nous avons trois façons de définir une fonction.

Notation 1 :

$$f: x \mapsto f(x) \; pour \; x \in I$$

Notation 2 :

$$\forall x \in I, f(x) = \cdots$$

Notation 3 :

$$f: \begin{cases} \mathfrak{D}_f \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Nous verrons cette année qu'il est parfois nécessaire de préciser « l'ensemble d'arrivée » de la fonction, même au sens large ! Cela ne sera pas nécessairement un réel, un complexe, mais un polynôme, une suite, un couple, une matrice… La notation 3 prend tout son sens lorsque nous n'arrivons pas dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Exemple I.a.1 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} \qquad g: x \mapsto \frac{sin(x)}{cos(x)} = \tan(x)$$

Remarque (lien avec les autres disciplines scientifiques) : En mathématiques nous avons un cadre général, ainsi une fonction est très souvent notée f (comme fonction) et la variable x (depuis Descartes !). Cependant il est parfois plus judicieux d'utiliser d'autres notations usuelles comme par exemple :
_ $x(t)$ et $y(t)$ pour l'évolution des coordonnées d'un point en fonction du temps (comme pour les équations horaires !).
_ $[H_3O^+](t)$ pour la concentration en H_3O^+ en fonction du temps.
_ $P_{H_2}(n)$ pour la pression de H_2 en fonction de la quantité de matière.

ATTENTION : Il arrive qu'une fonction puisse être définie sur un ensemble « plus large », mais par exemple en physique (mais aussi en mathématiques !), il est souvent inutile de définir la fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier (en physique par exemple la variable t temporelle n'a de sens que si $t \geq 0$, de même en mathématiques pour démontrer une inégalité par exemple).

Exemple I.a.2 : Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

b) Opération sur les fonctions

Définition (Somme, produit et quotient) : Soient f et g deux fonctions définie sur I.
(1) La somme de f et g est la fonction notée $(f+g)$ définie pour tout x ∈ I par :
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
(2) Le produit de f et g est la fonction notée $(f\times g)$ définie pour tout x ∈ I par :
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$
(3) Si g ne s'annule pas sur $I(\forall x\in I, g(x)\neq 0)$, le quotient de f et g est la fonction notée $\left(\frac{f}{g}\right)$ définie pour tout x ∈ I par :
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemple : On peut donc écrire que :
$$tan=\frac{sin}{cos}$$

Définition (composée de fonctions) : Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que f(I) ⊂ J.
On appelle **fonction composée** la fonction noté (g o f) de I dans ℝ tel que :
$$\forall\, x\in I, (g\ o\ f)(x)=g\big(f(x)\big)$$

Exemple I.b.1 : On pose :
$$g:\begin{cases}\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\dfrac{1}{x}\end{cases}\quad et\ f:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto x+1\end{cases}$$
Déterminer l'ensemble de définition puis la fonction : $h_1=(g\ o\ f)$ et $h_2=(f\ o\ g)$

II) Graphe d'une fonction

a) Définition

Définition (courbe représentative) : On appelle courbe représentative de f, noté $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points $M(x\,;f(x))$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ **:** $\mathcal{C}_f=\{(x;f(x))\,;x\ \in I\}$

Propriété II.a.1 : Soit f: ℝ → ℝ et a ∈ ℝ. Le graphe de :
- $x\longmapsto f(x)+a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- $x\longmapsto f(x+a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
- $x\longmapsto f(a-x)$ se déduit du graphe de f par une symétrie d'axe $x=\frac{a}{2}$.
- $x\longmapsto f(ax)$, $a\neq 0$, se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{a}$.
- $x\longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a.

Exemple II.a.2 : Voir Annexe I.2.1

b) Parité et périodicité

Définition :
- Une fonction f est **paire** lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que :
$$\forall x\in\mathcal{D}_f, f(-x)=f(x)$$
- Une fonction f est **impaire** lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que :
$$\forall x\in\mathcal{D}_f, f(-x)=-f(x)$$
- Une fonction f est T-périodique (T > 0) si :
$$\forall x\in\mathcal{D}_f, x+T\in\mathcal{D}_f\ et\ f(x+T)=f(x)$$

Exemple II.b.1 : Déterminer trois fonctions paires, trois impaires et trois périodiques de périodes différentes.

Propriété II.b.2 (Caractérisation graphique des fonctions paires, impaires et périodiques) :
(1) Une fonction f est paire si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
(2) Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
(3) Une fonction f est T-périodique si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

Remarque : Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on peut restreindre son étude sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ puis on en déduit la courbe par symétrie. De même pour les fonctions périodiques où l'on peut restreindre son étude sur un intervalle de longueur T.

Exemple II.b.3 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{sin(2x)}{sin^2(x)+1} \end{cases}$$

Déterminer son domaine d'étude minimale pour connaître l'allure de la courbe.

c) Graphe d'une bijection

Définition (bijection) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: x \mapsto f(x)$ une fonction définie sur I. On note J l'ensemble des images prises par $f(x)$: $J = \{f(x)\ tel\ que\ x \in I\}$ (on note souvent $J = f(I) = Im(f)$).
On dit que f est bijective de $I\ dans\ J$ si et seulement si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$:

$$\forall\, y \in J, \exists!\ x \in I, f(x) = y$$

On dit alors que f définie une bijection de I dans J.

Remarque : Pour démontrer qu'une fonction d'une variable réelle est bijective, on utilise souvent le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires !).

Exemple II.c.1 : On pose :

$$f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ sur\ \mathbb{R}$$

Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.

Exemple II.c.2 : On pose :

$$f: x \mapsto e^x + e^{-x}\ sur\ \mathbb{R}$$

Montrer que f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.

Définition (fonction réciproque) : Lorsque f est bijective, on peut alors définir sa réciproque, notée f^{-1}, appelé **bijection réciproque** de f et définie de J dans I par :

$$f^{-1}:\begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto f^{-1}(y) = l'unique\ antécédent\ de\ y\ par\ f \end{cases}$$

Remarque : Pour déterminer f^{-1}, on résout souvent l'équation $y = f(x)$ où y appartient à l'ensemble des images de f.

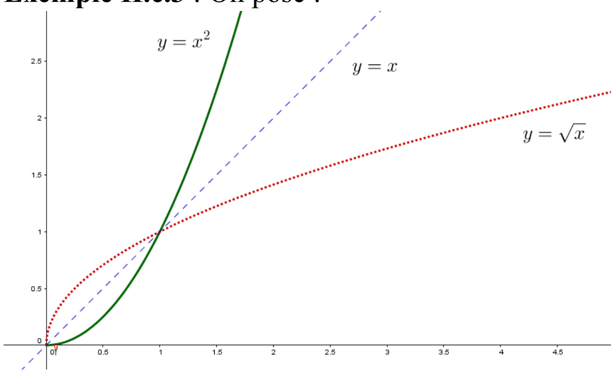
Exemple II.c.3 : On pose :

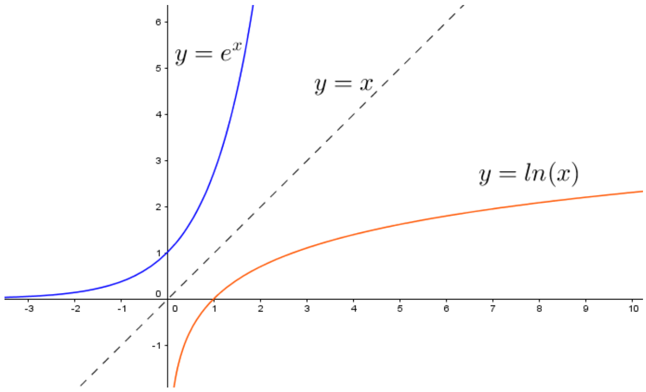
$$f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ sur\ \mathbb{R}$$

Déterminer la bijection réciproque de f, noté f^{-1}.

Propriété II.c.2 : Soit f une fonction bijective de I dans J intervalle de $\mathbb{R}$. Alors la courbe représentative de f^{-1} est symétrique par rapport à la courbe représentative de f par rapport à la droite $y = x$.

Exemple II.c.3 : On pose :





d) Graphe d'une fonction majorée, minorée ou bornée

Définition : On dit qu'une fonction est

- Majorée par M si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, f(x) \leq M$$

- Minorée par m si

$$\exists\, m \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, f(x) \geq m$$

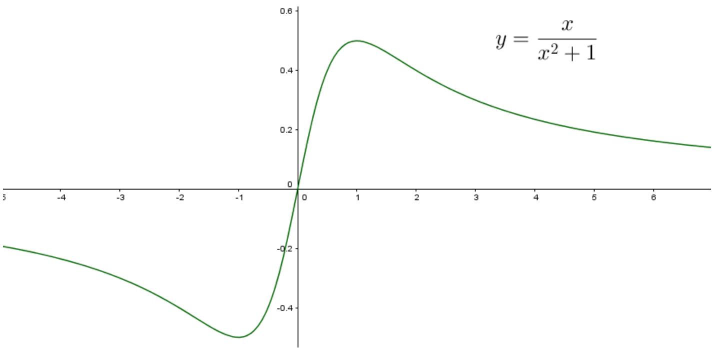
- Bornée par m et M si :

$$\exists\, (M; m) \in \mathbb{R}^2, \forall\, x \in I, m \leq\ f(x) \leq M$$

Exemple II.d.1: La fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases}$$

Est bornée sur $\mathbb{R}$.

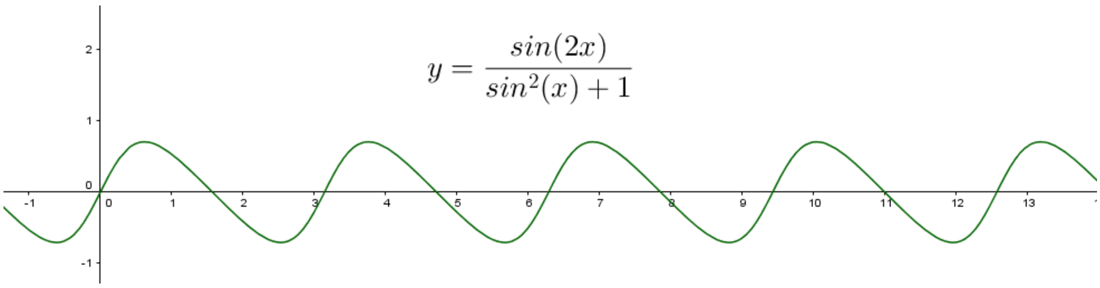


Propriété II.d.2 : Pour démontrer qu'une fonction est bornée, il suffit de démontrer que $|f|$ est majorée.

Application II.d.3 : Montrer que la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{sin(2x)}{sin^2(x)+1} \end{cases}$$

Est bornée sur $\mathbb{R}$.



III) Limite d'une fonction et conséquence sur le graphe

a) Opération sur les limites

Remarque : Les définitions mathématiques des limites d'une fonction sera abordée dans un chapitre ultérieur. On se base ici sur une approche intuitive et de « bon sens » abordée en terminale.

(1) soient $l, l' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(2) soient $l, l' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors fg a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(3) soient $l, l' \in \mathbb{R}$, $l' \neq 0$,

si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
si g a pour limite	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'>0$	$l'<0$	$l'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas particulier où l' est nul,

si f a pour limite	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0
si g a pour limite	$0+$	$0-$	$0+$	$0-$	0
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Application III.a.1 : Déterminer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+3x-1$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+3}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}$

b) Limites d'une composée

Propriété III.b.1 : Soient $(a,b,c) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\})^3$ et f et g deux fonctions pour lesquelles on suppose :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \ \ et \lim_{x\to b} g(x) = c$$

Alors sous réserve d'existence, la fonction composée gof vérifie :

$$\lim_{x\to a}(gof)(x) = c$$

Application III.b.2: Déterminer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2\times ln(x)^2 + 3\,ln(x) - 7}{5\,ln(x)^2 + 3}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to-\infty} cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

c) Théorème de comparaison et des gendarmes

Propriété III.c.1 : Soit b $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f, g deux fonctions définie sur un intervalle I contenant b ou ouvert en b. On a alors :

$$\begin{cases} \lim_{x\to b} f(x) = +\infty \\ \forall\, x \in I, f(x) \le g(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to b} g(x) = +\infty$$

On a de même avec-∞ :

$$\begin{cases} \lim_{x\to b} f(x) = -\infty \\ \forall\, x \in I, f(x) \ge g(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to b} g(x) = -\infty$$

Application III.c.2 : Déterminer :

$\lim_{x\to+\infty}(x + sin(x))$ $\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{cos(x)^2+2}\right)$

Propriété III.c.3 : Soient $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, L$\in \mathbb{R}$ et f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I contenant b ou ouvert en b tels que l'on ait les deux conditions suivantes :

$$\forall\, x \in I, f(x) \le g(x) \le h(x)$$
$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} h(x) = L$$

Alors :

$$\lim_{x\to b} g(x) = L$$

Application III.c.4 : Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\ x\,sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

d) Asymptotes

Définition (ASYMPTOTE HORIZONTALE) : Soit *f* une fonction telle que : il existe $\ell\in\mathbb{R}$ et avec :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$$

On dit alors que la courbe représentative de f, C_f, admet une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d´équation $y = \ell$.

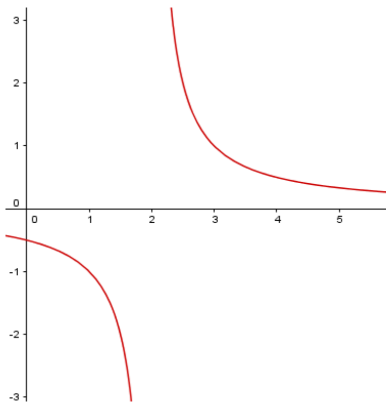
Exemple III.d.1 : On pose $\forall$ x $\in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2+1}$$

Définition (ASYMPTOTE VERTICALE) : Soit f une fonction telle que :
il existe $\ell\in\mathbb{R}$ et avec :

$$\lim_{x\to\ell} f(x) = \pm\infty$$

On dit alors que la courbe représentative de f, C_f, admet une asymptote verticale en $\pm\infty$ d´équation $x = \ell$.



ATTENTION : On peut avoir une limite à gauche et une limite à droite différente.

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty \qquad et \quad \lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty$$

La droite d´équation *x=2* est asymptote verticale à C_f en +∞.

Exemple III.d.2 : On pose $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.