

**PCSI 2025-2026**  
**DM n°1**

**Exercice 1 :** On pose :

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $\mathcal{D}_f$ , puis montrer que  $f$  est impaire.
- 2) Démontrer que :

$$\forall x \in ]-1; 1[, f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

- 3) En déduire les variations de  $f$  ainsi que les limites aux bornes de son ensemble de définition.
- 

**Définition (bijection) :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: x \mapsto f(x)$  une fonction définie sur  $I$ . On note  $J$  l'ensemble des images prises par  $f(x)$  :  $J = \{f(x) \text{ tel que } x \in I\}$ . On peut noter  $J = \text{Im}(f) = f(I)$ .

On dit que  $f$  est bijective de  $I$  dans  $J$  si et seulement si pour tout  $y \in J$ , il existe un unique  $x \in I$  tel que  $f(x) = y$  :

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$$

On dit alors que  $f$  définit une bijection de  $I$  dans  $J$ .

- 4) En déduire que  $f$  réalise une bijection de  $] - 1; 1[$  dans un ensemble à déterminer.
- 

**Définition (fonction réciproque) :** Lorsque  $f$  est bijective, on peut alors définir sa réciproque, notée  $f^{-1}$ , appelé **bijection réciproque** de  $f$  et définie de  $J$  dans  $I$  par :

$$f^{-1}: \begin{matrix} J \rightarrow I \\ y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{matrix}$$

- 5) Déterminer l'ensemble de définition de  $f^{-1}$  puis déterminer  $f^{-1}$ .
- 6) Refaire les mêmes questions avec la fonction :  $f: x \mapsto e^x - e^{-x}$ .

**PCSI 2025-2026**  
**DM n°1**

**Exercice 1 :** On pose :

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $\mathcal{D}_f$ , puis montrer que  $f$  est impaire.
- 2) Démontrer que :

$$\forall x \in ]-1; 1[, f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

- 3) En déduire les variations de  $f$  ainsi que les limites aux bornes de son ensemble de définition.
- 

**Définition (bijection) :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: x \mapsto f(x)$  une fonction définie sur  $I$ . On note  $J$  l'ensemble des images prises par  $f(x)$  :  $J = \{f(x) \text{ tel que } x \in I\}$ . On peut noter  $J = \text{Im}(f) = f(I)$ .

On dit que  $f$  est bijective de  $I$  dans  $J$  si et seulement si pour tout  $y \in J$ , il existe un unique  $x \in I$  tel que  $f(x) = y$  :

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$$

On dit alors que  $f$  définit une bijection de  $I$  dans  $J$ .

- 4) En déduire que  $f$  réalise une bijection de  $] - 1; 1[$  dans un ensemble à déterminer.
- 

**Définition (fonction réciproque) :** Lorsque  $f$  est bijective, on peut alors définir sa réciproque, notée  $f^{-1}$ , appelé **bijection réciproque** de  $f$  et définie de  $J$  dans  $I$  par :

$$f^{-1}: \begin{matrix} J \rightarrow I \\ y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{matrix}$$

- 5) Déterminer l'ensemble de définition de  $f^{-1}$  puis déterminer  $f^{-1}$ .
- 6) Refaire les mêmes questions avec la fonction :  $f: x \mapsto e^x - e^{-x}$ .