Activité 3.2 : La dérivée au service de la limite

On cherche dans cet exercice à déterminer :

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

Partie A : Analyse et conjecture

1) Pourquoi ne peut-on pas calculer la limite facilement ?

2) a) Tracer sur la calculatrice la fonction définie sur $\mathbb{R}^+\backslash\{9\}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

b) Que peut-on conjecturer, grâce à un tableau de valeur, pour :

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

Partie B : Démonstration algébrique

1) Démontrer, que pour tout réel x dans $\mathbb{R}^+\backslash\{9\}$:

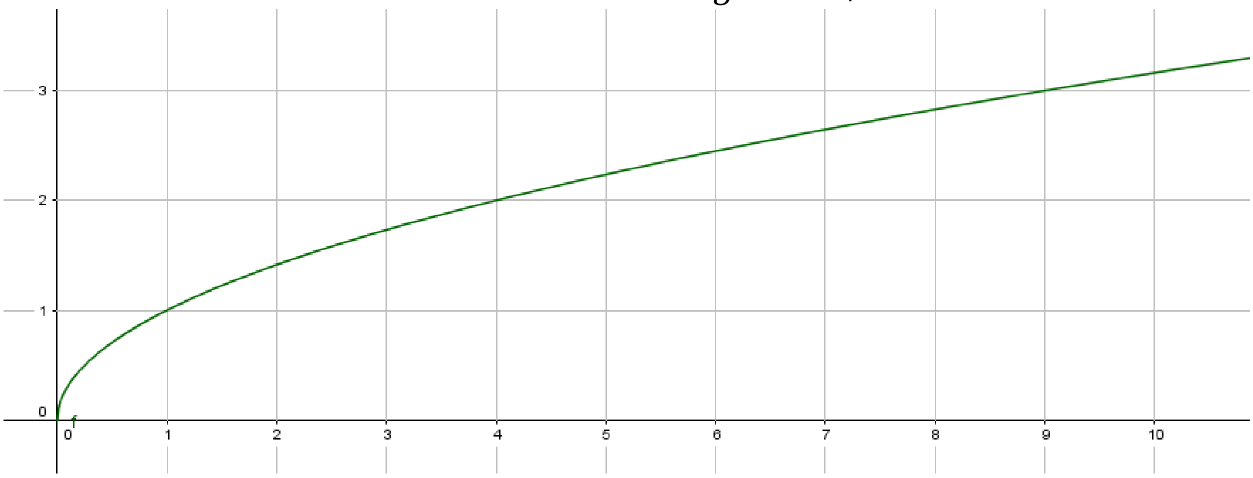
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

2) En déduire la valeur de :

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

Partie C : Démonstration algébrique

On a tracé ci-dessous la courbe de la fonction : $g : x \mapsto \sqrt{x}$



1) Placer le point de coordonnées $A(9;3)$ et $B\left(x;\sqrt{x}\right)$, avec $x \neq 9$.

2) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

3) Que devient la droite (AB) si B s'approche de A ? Que devient alors son coefficient directeur ?

4) Déterminer la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

5) En déduire :

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$